Divisoren in eindimensionalen affinoiden und affinen Räumen

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität
zu Göttingen

vorgelegt von

Dieter Denneberg

aus Göttingen

Göttingen 1967

Divisoren in eindimensionalen affinoiden und affinen Räumen

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität
zu Göttingen

vorgelegt von

Dieter Denneberg

aus Göttingen

Göttingen 1967

D 7

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Referent: Prof. Dr. H. Grauert

Korreferent: Prof. Dr. M. Kneser

Tag der mündlichen Prüfung: 26.10.1967

Inhaltsverzeichnis

Einleitung 4

§1 Die totalen Quotientenringe k-affinoider und $\mathfrak{X}$-affiner Algebren 7

§2 Die Ordnung einer Funktion in einem Punkt eines eindimensionalen k-affinoiden Raumes 18

§3 Invarianz der Ordnung beim Übergang zum $\mathfrak{X}$-Affinen 27

§4 Überlagerungen und Verzweigungsordnung 30

§5 Divisoren 36

§6 Bilder und Urbilder von Hauptdivisoren beim Übergang vom k-Affinoiden zum $\mathfrak{X}$-Affinen 40

Literaturverzeichnis 47

Einleitung

Die Grundlagen der Analysis über vollständig nichtarchimedisch bewerteten Körpern k wurden hauptsächlich in den Arbeiten [7] von TATE und [4],[5] von GRAUERT und REMMERT gelegt. Der wesentliche Unterschied zur komplexen Analysis beruht darauf, daß k im Vergleich zum Körper der komplexen Zahlen weniger topologische Struktur trägt: die Bewertungstopologie von k ist total unzusammenhängend, dafür jedoch mehr algebraische: der Einheitskreis E von k ist ein lokaler Ring. Um diese algebraische Struktur ausnutzen zu können, betrachtet man die Algebra T_n der strikt, d.h. auf E^n konvergenten Potenzreihen über k. Die affinoide Geometrie in E^n besteht dann im Studium der Nullstellengebilde X von Idealen $\mathfrak{a}$ des T_n und der zu den k-affinoiden Mengen X gehörigen k-affinoiden Algebren $A = T_n/\mathfrak{a}$.

Durch den Übergang von k, das wir hier als algebraisch abgeschlossen voraussetzen, zu seinem Restklassenkörper $\mathfrak{K}$ wird A in kanonischer Weise eine $\mathfrak{K}$-affine Algebra $\tilde{A}$ zugeordnet, und es gibt eine natürliche Abbildung $X \longrightarrow \tilde{X}$ von X auf die zu $\tilde{A}$ gehörige $\mathfrak{K}$-affine Menge $\tilde{X}$. $\tilde{X}$ und $\tilde{A}$ enthalten bereits viel Information über X und A : z.B. haben X und $\tilde{X}$ die gleiche Dimension, mit $\tilde{X}$ ist auch X irreduzibel und singularitätenfrei (zumindest im eindimensionalen Fall), leider aber nicht umgekehrt. Viele Probleme der affinoiden (analytischen) Geometrie lassen sich so auf Probleme der affinen (algebraischen) Geometrie zurückführen. Wir

werden das hier für multiplikative Cousin-Probleme über rein eindimensionalen k-affinoiden Mengen X durchführen. Als Ergebnis erhalten wir u.a.:

Ist $\tilde{X}$ irreduzibel und singularitätenfrei, dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus zwischen den Gruppen der Divisorenklassen über X und $\tilde{X}$. Anders ausgedrückt: Ein Cousin-Problem über X ist genau dann lösbar, wenn das zugeordnete Cousin-Problem über $\tilde{X}$ lösbar ist.

Wenn $\tilde{X}$ Singularitäten besitzt, ist der Satz falsch (vgl. Beispiel 1 in §6). Für die Lösbarkeit von Cousin-Problemen enthält also die der k-affinoiden Menge X zugeordnete $\mathfrak{X}$-affine Menge $\tilde{X}$ i.a. nicht genug Information, selbst wenn man dem Divisor, d.h. der Cousin-Verteilung, über X starke einschränkende Bedingungen auferlegt (vgl. Beispiel 2 in §6).

Den Grundkörper k setzen wir - mit Ausnahme des vorbereitenden §1 - stets als algebraisch abgeschlossen voraus, die k-affinoide Algebra A als reduziert und rein eindimensional. In den §§2 und 3 definieren wir die Nullstellenordnung einer Funktion in einem (nicht notwendig regulären) Punkt in einer Weise, die sowohl auf die Funktionen aus A wie auch die aus $\tilde{A}$ anwendbar ist, und die mit dem Übergang von A zu $\tilde{A}$ verträglich ist. Die §§4 und 5 stellen Begriffe und Hilfsmittel für §6 bereit, in dem Kriterien dafür aufgestellt werden, daß ein Divisor D über X Hauptdivisor ist, wenn es der zugeordnete Divisor $\tilde{D}$ über $\tilde{X}$ ist, und umgekehrt. Anwendung auf den Fall singularitätenfreier $\tilde{X}$ liefert den oben angegebenen Satz.

Herrn Professor H. Grauert danke ich vielmals für die Anregung zu dieser Arbeit und für seine Unterstützung bei ihrer Anfertigung.

§1 Die Totalen Quotientenringe k-affinoider und $\varkappa$-affiner Algebren

0. Sei k ein vollständig, nichttrivial, nichtarchimedisch bewerteter Körper und $E := \{x \in k : |x| \leq 1\}$ sein Bewertungsring. Sei $T_n = k\langle\langle X_1,\ldots,X_n\rangle\rangle$ die noethersche ([7] Th.4.5) Banachalgebra der strikt, d.h. auf E^n, konvergenten Potenzreihen in den n Unbestimmten $X_1,\ldots,X_n$ über k. Eine k-affinoide Algebra A ist bis auf Isomorphie und Homöomorphie eine Faktoralgebra eines T_n. Die von T_n auf A induzierte Banachtopologie ist durch die algebraische Struktur von A bereits eindeutig bestimmt ([7] Th.4.6). Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$ von A ist $A/\mathfrak{m}$ ein endlich algebraischer Erweiterungskörper von k ([7] Th.4.5), auf den sich also die Bewertung von k eindeutig fortsetzt. Faßt man die Elemente $f \in A$ in natürlicher Weise als Funktionen über $\operatorname{Max} A$ auf, so definiert $|f| := \sup_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A} |f \bmod \mathfrak{m}|$ die Supremumnorm von A (vgl.[7] §5 und [4] III §6). Auf T_n stimmt die Supremumnorm mit der Banachnorm überein ([4] III §3 Satz 3). Die von der Supremumnorm auf A definierte Topologie der gleichmäßigen Konvergenz ist genau dann hausdorffsch, wenn A reduziert ist. In diesem Fall stimmt sie auch mit der Banachtopologie von A überein ([3] II Satz 3.4 oder, falls k vollkommen, [4] III §6.5).

Aufgrund der scharfen Dreiecksungleichung $|f + g| \leq \max(|f|,|g|)$, $f,g \in A$, bildet $\mathring{A} := \{f \in A : |f| \leq 1\}$ einen Ring und $\mathfrak{A}(A) := \{f \in A : |f| < 1\}$ ein Ideal in $\mathring{A}$. Der Faktorring $\tilde{A} := \mathring{A}/\mathfrak{A}(A)$ ist offensichtlich reduziert. Die Anwendung des Restklassenhomomorphismus $\mathring{A} \longrightarrow \tilde{A}$ wollen wir

immer durch Überschlängeln kennzeichnen. Das Bild von $f \in \mathring{A}$ in $\tilde{A}$ ist also $\tilde{f}$. Für eine beliebige Teilmenge $M \subset A$ bezeichnen wir mit $\tilde{M}$ das Bild von $M \cap \mathring{A}$ in $\tilde{A}$. Der Homomorphismus $\mathring{A} \longrightarrow \tilde{A}$ bildet $E = k \cap \mathring{A}$ auf den Restklassenkörper $\varkappa := \tilde{k}$ von k ab. $\tilde{A}$ ist also eine $\varkappa$-Algebra. In [5] §3 Satz 3 Kor. wird gezeigt, daß $\tilde{A}$ über $\varkappa$ endlich erzeugt, d.h. eine $\varkappa$-affine Algebra ist. Speziell ist $\tilde{T}_n = \varkappa[X_1,\ldots,X_n]$, d.h. eine Polynomalgebra in n Unbestimmten über $\varkappa$.

Ein k-Algebrahomomorphismus $\varphi : A \longrightarrow B$ k-affinoider Algebren ist immer stetig ([4] III §4 Satz 8) und damit beschränkt, so daß wegen [4] III §6 Satz 5 und 6 $\varphi(\mathring{A}) \subset \mathring{B}$ und $\varphi(\not{A}(A)) \subset \not{A}(B)$. $\varphi|\mathring{A}$ induziert also einen $\varkappa$-Algebrahomomorphismus $\tilde{\varphi} : \tilde{A} \longrightarrow \tilde{B}$. Für die Berechnung von $\tilde{A}$ erweist sich der folgende Satz oft als nützlich.

Satz 1.1: Sei $\mathfrak{a} \subset T_n$ ein Hauptideal derart, daß $\tilde{\mathfrak{a}}$ in $\tilde{T}_n$ reduziert ist. Ist $A = T_n/\mathfrak{a}$, dann ist $\tilde{A} = \tilde{T}_n/\tilde{\mathfrak{a}}$.

Beweis: Sei $\varphi : T_n \longrightarrow A$ die Restklassenabbildung, dann gibt es zu jedem $f \in A$ ein $\hat{f} \in \varphi^{-1}(f)$ mit $|f| = |\hat{f}|$: Sei $\mathfrak{a} = T_n g$, $|g| = 1$ und o.E. g X_n-allgemein von der Ordnung r ([4] I §2.3), dann gibt es aufgrund der Weierstraßschen Formel ([4] I §2 Satz 1) ein $\hat{f} \in \varphi^{-1}(f)$ mit $\hat{f} \in T_{n-1}[X_n]$ und grad $\hat{f} < r$. Setzen wir o.E. $|\hat{f}| = 1$ (der Fall $f = 0$ ist trivial), so gilt wegen grad $\tilde{\hat{f}} < r = \text{grad } \tilde{g}$ $\tilde{\hat{f}} \notin \tilde{T}_n \tilde{g} = \tilde{\mathfrak{a}}$. Da $\tilde{\mathfrak{a}}$ reduziert ist, gibt es also einen Punkt x im Nullstellengebilde $N(g)$ von g (dessen Bild $\widetilde{N(g)}$ im n-dimensionalen affinen Raum über $\varkappa$ das Nullstellengebilde von $\tilde{g}$ ist ([4] III §3 Satz 3)) mit $0 \neq \tilde{\hat{f}}(\tilde{x}) = \widetilde{\hat{f}(x)}$, d.h. $|f(x)| =$

$|\hat{f}(x)| = 1$. Hieraus folgt $|f| \geq |\hat{f}|$, und $|f| \leq |\hat{f}|$ ist trivial.

Aus dem soeben Gezeigten ergibt sich $\varphi(\mathring{T}_n) = \mathring{A}$ und $\varphi(\mathfrak{f}(T_n)) = \mathfrak{f}(A)$. $\tilde{\varphi}: \tilde{T}_n \longrightarrow \tilde{A}$ ist also surjektiv und $\ker\tilde{\varphi} = \overbrace{\varphi^{-1}(\mathfrak{f}(A))}^{} = \overbrace{\mathring{T}_n g + \mathfrak{f}(T_n)}^{} = \tilde{T}_n\tilde{g} = \tilde{\mathfrak{a}}$, d.h. $\tilde{A} = \tilde{T}_n/\tilde{\mathfrak{a}}$, QED.

Die Voraussetzung, daß $\mathfrak{a}$ ein Hauptideal ist, kann man noch fallen lassen, wie L. GERRITZEN und U. GÜNTZER in der Arbeit: Über Restklassennormen auf affinoiden Algebren, Inventiones math. 3 (1967), bewiesen haben: Aus dem dortigen Satz 1 und der Reduziertheit von $\tilde{\mathfrak{a}}$ folgt die Gleichheit der Supremumnorm von A mit der Banachnorm von A , so daß abermals mit Satz 1 $\varphi(\mathring{T}_n) = \mathring{A}$ und $\varphi(\mathfrak{f}(T_n)) = \mathfrak{f}(A)$.

1. Sei in diesem Paragraphen A fortan eine reduzierte rein d-dimensionale (d.h. alle minimalen Primideale von A haben die Dimension d) k-affinoide Algebra und $T \simeq k\langle\langle X_1,\ldots,X_d\rangle\rangle$ eine Unteralgebra von A , so daß A ein endlicher T-Modul ist. Die Existenz eines solchen $T \subset A$ wird wegen dim T = d durch den Normalisierungssatz ([4] III §4.1 und 2) und [6] III Prop.3 sichergestellt, und es gilt $|g|_T = |g|_A$ für alle $g \in T \subset A$.

Wir wollen die Beziehungen zwischen den totalen Quotientenringen Q(A) von A und $Q(\tilde{A})$ von $\tilde{A}$ untersuchen.

Hilfssatz 1.2: (1) Für $f \in A$ und $g \in T$ gilt $|gf| = |g||f|$,
(2) $\tilde{A}$ ist rein d-dimensional,
(3) $Q(T) \subset Q(A)$ und Q(A) ist endliche Q(T)-Algebra,

(4) $Q(\tilde{T}) \subset Q(\tilde{A})$ und $Q(\tilde{A})$ ist endliche $Q(\tilde{T})$-Algebra,

(5) $Q(A) = Q(T)[A]$, $Q(\tilde{A}) = Q(\tilde{T})[\tilde{A}]$.

Beweis: (1): Sei $\mathfrak{p}$ ein minimales (und damit d-dimensionales) Primideal von A , dann folgt aus $\dim T = d$ und [6] III Prop.3 $T \cap \mathfrak{p} = (0)$, d.h. der endliche Homomorphismus $T \longrightarrow A/\mathfrak{p}$ ist injektiv. Hieraus folgt mit dem in [5] §3.4 ii) schon bewiesenen Spezialfall nullteilerfreier A

$$|gf| = \max_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Min} A} |gf \bmod \mathfrak{p}| = \max_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Min} A} |g||f \bmod \mathfrak{p}| = |g| \max_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Min} A} |f \bmod \mathfrak{p}|$$
$$= |g||f| .$$

(2): Die Gleichung (1) besagt, daß $\tilde{T}$ keine Nullteiler von $\tilde{A}$ enthält. Für die minimalen Primideale $\mathfrak{P}$ von $\tilde{A}$ gilt also $\tilde{T} \cap \mathfrak{P} = (0)$. Da $\tilde{A}$ endlicher $\tilde{T}$-Modul ist ([5] §3 Satz 3), folgt aus $\dim \tilde{T} = d$ und [6] III Prop.3, daß $\tilde{A}$ rein d-dimensional ist.

(3),(4): Da T und $\tilde{T}$ keine Nullteiler von A bzw. $\tilde{A}$ enthalten, folgt die jeweils erste Behauptung. Die zweite ist für nullteilerfreie A bzw. $\tilde{A}$ klar: Ist nämlich $f_1,\ldots,f_r$ ein Erzeugendensystem von A über T , dann ist, da A ganz über T ist, $Q(A) = Q(T)(f_1,\ldots,f_r)$ eine endlich algebraische Körpererweiterung von $Q(T)$, und entsprechend für $\tilde{A}$. Der Allgemeinfall ergibt sich hieraus mit den natürlichen Isomorphien $Q(A) \simeq \bigoplus_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Min} A} A_{\mathfrak{p}} = \bigoplus_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Min} A} Q(A/\mathfrak{p})$ und $Q(\tilde{A}) \simeq \bigoplus_{\mathfrak{P}\in \operatorname{Min} A} A_{\mathfrak{P}} = \bigoplus_{\mathfrak{P}\in \operatorname{Min} A} Q(A/\mathfrak{P})$ ([2] IV §2 Prop.10).

(5): Sei $\frac{a_\mu}{b_\mu} \in Q(A)$, $a_\mu, b_\mu \in A$, $\mu = 1,\ldots,m$, eine Basis von $Q(A)$ über $Q(T)$, dann ist auch $f_\mu := \frac{a_\mu}{b_\mu} b_1 \ldots b_m \in A$, $\mu = 1,\ldots,m$, eine Basis, denn Multiplikation mit dem Nichtnullteiler $b_1,\ldots,b_m$ erhält die Basiseigenschaft. Hieraus folgt

$Q(A) = \sum_{\mu=1}^{m} Q(T)f_\mu = Q(T)[A]$. Ebenso beweist man die zweite Formel, QED.

Wir setzen $K := Q(A)$ und $L := Q(T)$. Da in T die strenge Produktregel gilt, wird durch

$$|\frac{a}{b}| := \frac{|a|}{|b|} \quad , \quad a,b \in T \ , \ b \neq 0 \ ,$$

L zu einem bewerteten Oberkörper von k . $\partial\mathring{T} := \{g \in T : |g| = 1\}$ ist ein multiplikatives System und es gilt $L = T_{\partial\mathring{T}}$, so daß $K = L[A] = T_{\partial\mathring{T}}[A] = A_{\partial\mathring{T}}$. Jedes $q \in K$ besitzt also eine Darstellung $q = \frac{a}{b}$ mit $a \in A$, $b \in \partial\mathring{T}$. Wir zeigen, daß dann

$$|\frac{a}{b}| := |a| \quad , \quad a \in A \ , \ b \in \partial\mathring{T} \ ,$$

K zu einer normierten k-Algebra macht, und daß diese Norm unabhängig von der Auswahl der k-Unteralgebra $T \subset A$ ist:

Sei also $T' \subset A$, $T' \cong k\langle\langle X_1,\ldots,X_d\rangle\rangle$ eine weitere Unter-Algebra derart, daß A endlicher T'-Modul ist, und sei $\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}$, $a' \in A$, $b' \in \partial\mathring{T}'$, dann gilt nach Hilfssatz 1.2(1) $|a| = |a||b'| = |ab'| = |a'b| = |a'||b| = |a'|$, qed.

Die Norm von K ist eine Fortsetzung der Bewertung von L und mit Hilfssatz 1.2(1) folgt $|p\,q| = |p||q|$ für $p \in L$, $q \in K$, d.h. K ist sogar eine normierte L-Algebra. Wir definieren wie oben für A den Ring

$$\mathring{K} := \mathring{A}_{\partial\mathring{T}} = \{q \in K : |q| \leq 1\}$$

und darin das Ideal

$$\mathcal{A}(K) := \mathring{K}\mathcal{A}(A) = \{q \in K : |q| < 1\} \ .$$

Der Restklassenhomomorphismus $\mathring{K} \longrightarrow \tilde{K} := \mathring{K}/\mathcal{A}(K)$ ist dann eine Fortsetzung von $\mathring{A} \longrightarrow \tilde{A} \subset \tilde{K}$, es gilt sogar:

Satz 1.3: A sei eine reduzierte reindimensionale k-affinoide Algebra, dann gibt eine natürliche Isomorphie

$$\widetilde{Q(A)} \simeq Q(\widetilde{A}) .$$

Weiter seien $A_1,\dots,A_r$ die Primkomponenten von A, dann gibt es natürliche Isomorphismen

$$Q(A) \simeq \bigoplus_{\rho=1}^{r} Q(A_\rho) , \quad Q(\widetilde{A}) \simeq \bigoplus_{\rho=1}^{r} Q(\widetilde{A}_\rho) .$$

Beweis: a) Aus der Vertauschbarkeit von Faktor- und Quotientenringbildung ([8] IV §10 p.227) folgt $\widetilde{K} = \mathring{A}_{\partial\mathring{T}}/\mathring{A}_{\partial\mathring{T}}\mathcal{A}(A) \simeq (\mathring{A}/\mathcal{A}(A))_{\partial\mathring{T}+\mathcal{A}(A)/\mathcal{A}(A)} = \widetilde{A}_{\widetilde{T}-(0)} = Q(\widetilde{T})[\widetilde{A}] = Q(\widetilde{A})$. b) Der natürliche k-Algebramonomorphismus $A \hookrightarrow \bigoplus_{\rho=1}^{r} A_\rho$ induziert einen Isomorphismus $Q(A) \xrightarrow{\simeq} \bigoplus_{\rho=1}^{r} Q(A_\rho)$ ([2] IV §2 Prop.10). Sei $q \in K$ und q_ρ das natürliche Bild von q in $K_\rho := Q(A_\rho)$, dann gilt wie in A $|q| = \max_{\rho=1,..,r} |q_\rho|$, so daß $\mathring{K} \simeq \bigoplus \mathring{K}_\rho$ und $\mathcal{A}(K) \simeq \bigoplus \mathcal{A}(K_\rho)$. Mit dem ersten Teil des Satzes folgt dann $\widetilde{K} \simeq \bigoplus \widetilde{K}_\rho \simeq \bigoplus Q(\widetilde{A}_\rho)$, QED.

Wie bisher in $\mathring{A}$ bezeichnen wir das Bild eines $q \in \mathring{K}$ in $\widetilde{K}$ mit $\tilde{q}$.

Hilfssatz 1.4: Seien $q_1,\dots,q_r \in \mathring{K}$. $\tilde{q}_1,\dots,\tilde{q}_r \in \widetilde{K}$ sind linear unabhängig über $\widetilde{L}$ genau dann, wenn für jedes $f = \sum_{\rho=1}^{r} a_\rho q_\rho$, $a_\rho \in L$, $|f| = \max_{\rho=1,..,r} |a_\rho|$.

Beweis: Seien $\tilde{q}_1,\dots,\tilde{q}_r$ linear unabhängig über $\widetilde{L}$. Wir setzen o.E. $|a_1| = \max_\rho |a_\rho| = 1$ voraus. Wäre $|f| < \max|a_\rho|$, dann wäre $0 = \tilde{f} = \Sigma \tilde{a}_\rho \tilde{q}_\rho$, und wegen der linearen Unabhängigkeit der $\tilde{q}_1,\dots,\tilde{q}_r$ gälte $\tilde{a}_\rho = 0$, $\rho = 1,\dots,r$, im Widerspruch zu $|a_1| = 1$. Sei umgekehrt die Bedingung erfüllt und gelte $\Sigma \tilde{a}_\rho \tilde{q}_\rho = 0$, $\tilde{a}_\rho \in \widetilde{L}$, dann folgt für Urbilder $a_1,\dots,a_r \in L$ der $\tilde{a}_1,\dots,\tilde{a}_r$ $1 > |\Sigma a_\rho q_\rho| = \max|a_\rho|$, also $\tilde{a}_\rho = 0$, $\rho = 1,\dots,r$, d.h. $\tilde{q}_1,\dots,\tilde{q}_r$ sind linear unabhängig, QED.

Korollar: Seien $q_1,\dots,q_r \in \mathring{K}$ derart, daß $\tilde{q}_1,\dots,\tilde{q}_r$ linear unabhängig über $\tilde{L}$ sind, dann sind $q_1,\dots,q_r$ auch linear unabhängig über L.

2. Hier erinnern wir an Begriffe wie Hauptpolynom und Norm eines Elementes einer ganzen Ringerweiterung und wenden sie auf unseren Fall, die Ringerweiterungen $A \supset T$ und $\tilde{A} \supset \tilde{T}$ an.

Sei I ein Integritätsring und R ein ganzer Oberring von I. I enthalte keine Nullteiler von R, dann ist $Q(R)$ ein $Q(I)$-Vektorraum. Es sei

$$[R:I] := \dim_{Q(I)} Q(R) < \infty .$$

Jedes Element $f \in R$ definiert durch $q \rightsquigarrow fq$, $q \in Q(R)$, eine Homothetie von $Q(R)$. Deren charakteristisches Polynom über $Q(I)$ $\chi_f(W) \in Q(I)[W]$ nennen wir das Hauptpolynom von f bezüglich R über I. χ_f ist ein unitäres Polynom vom Grade $[R:I]$ und es gilt $\chi_f(f) = 0$. Bis auf das Vorzeichen heißt das konstante Glied von $\chi_f(W)$ die Norm

$$N_I^R(f) := (-1)^{[R:I]}\, \chi_f(0) \in Q(I)$$

von f bezüglich R über I. Sei R zusätzlich noethersch und reduziert und seien $\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_r$ die minimalen Primideale von R, dann induzieren die natürlichen Epimorphismen $R \longrightarrow R_\rho := R/\mathfrak{p}_\rho$ einen Monomorphismus $R \hookrightarrow \bigoplus_{\rho=1}^{r} R_\rho$ und nach [2] IV §2 Prop.10 einen Isomorphismus $Q(R) \xrightarrow{\sim} \bigoplus Q(R_\rho)$. Da I keine Nullteiler von R enthält, ist dies auch ein $Q(I)$-Vektorraumisomorphismus. Mit Hilfe der linearen Algebra beweist man dann $\chi_f = \prod_{\rho=1}^{r} \chi_{f_\rho}$, wobei f_ρ das natürliche Bild von f in R_ρ bezeichnet. Hieraus folgt sofort

$$N_I^R(f) = \prod_{\rho=1}^{r} N_I^R(f_\rho) .$$

Weiter weiß man ([8] II §10 Th.20), daß χ_{f_ρ} eine Potenz des Minimalpolynoms von f_ρ über $Q(I)$ ist. Setzen wir schließlich noch I als normal (d.h. ganzabgeschlossen in $Q(I)$) voraus, dann liegen die Koeffizienten des Minimalpolynoms von f_ρ über $Q(I)$ bereits in I ([8] V §3 Th.4), so daß $\chi_{f\rho} \in I[W]$, $\rho = 1,\dots,r$, und damit $\chi_f \in I[W]$ und $N_I^R(f) \in I$.

Alle oben an R und I gestellten Forderungen werden von A und T bzw. $\tilde{A}$ und $\tilde{T}$ erfüllt. Wir beweisen nun die Verträglichkeit von Normbildung und Überschlängeln.

Satz 1.5: Es gelte $[\tilde{A}:\tilde{T}] = [A:T]$. Sei $f \in \mathring{A}$ und $\chi_f \in T[W]$ das Hauptpolynom von f bzgl. A über T , und sei $\chi_{\tilde{f}} \in T[W]$ das Hauptpolynom von $\tilde{f}$ bzgl. $\tilde{A}$ über $\tilde{T}$, dann gilt $\widetilde{\chi_f} = \chi_{\tilde{f}}$.

Beweis: Sei $m := [\tilde{A}:\tilde{T}]$ und $\tilde{q}_1,\dots,\tilde{q}_m$ eine Basis von $\tilde{K}$ über $\tilde{L}$. Aus Hilfssatz 1.4 Kor. folgt dann, daß ein System $q_1,\dots,q_m \in \mathring{K}$ von Urbildern der $\tilde{q}_1,\dots,\tilde{q}_m$ linear unabhängig über L ist, und wegen $[A:T] = m$ sogar eine Basis von K über L bildet. Die Homothetie $q \rightsquigarrow fq$, $q \in K$, werde bzgl. der Basis $q_1,\dots,q_m$ durch die Matrix $(a_{\mu\nu})$, $a_{\mu\nu} \in L$, beschrieben. Aufgrund von Hilfssatz 1.4 gilt $a_{\mu\nu} \in \mathring{L}$, so daß die Matrix $(\tilde{a}_{\mu\nu})$ die Homothetie $\tilde{q} \rightsquigarrow \tilde{f}\tilde{q}$, $\tilde{q} \in \tilde{K}$ bzgl. der Basis $\tilde{q}_1,\dots,\tilde{q}_m$ beschreibt. Hieraus folgt, wenn $(\delta_{\mu\nu})$ die m-reihige Einheitsmatrix bezeichnet, $\chi_{\tilde{f}} = \det(W(\delta_{\mu\nu}) - (\tilde{a}_{\mu\nu}))$ $= \det(W(\delta_{\mu\nu}) - (a_{\mu\nu})) = \widetilde{\chi_f}$, QED.

Korollar: Sei $[\tilde{A}:\tilde{T}] = [A:T]$ und $f \in \mathring{A}$, dann gilt $N_{\tilde{T}}^{\tilde{A}}(\tilde{f}) = \widetilde{N_T^A(f)}$.

Die Dimensionsgleichheit $[\tilde{A}:\tilde{T}] = [A:T]$ ist notwendig für die Gültigkeit von Satz 1.5. Nach [5] §4 Satz 1 ist sie stets erfüllt, wenn der Grundkörper k algebraisch abgeschlossen und A nullteilerfrei ist, und wenn $\tilde{A}$ separiert über $\tilde{T}$ liegt, d.h. wenn die Quotientenkörper aller Primkomponenten von $\tilde{A}$ separable Körpererweiterungen von $Q(\tilde{T})$ sind. Die Dimensionsgleichheit bleibt auch noch erhalten, wenn man statt A nullteilerfrei nur fordert, daß A reduziert und reindimensional ist, denn aufgrund von Satz 1.3 ist dann $[\tilde{A}:\tilde{T}] = \Sigma\,[\tilde{A}_\rho:\tilde{T}] = \Sigma\,[A_\rho:T] = [A:T]$. Auch die Voraussetzung, daß $\tilde{A}$ separiert über $\tilde{T}$ liegt, ist in Wahrheit überflüssig für die Dimensionsgleichheit, zumindest wenn A die Dimension eins hat. Dieses Ergebnis erhalten wir erst später (§4 Kor. zu den Regeln). Vorher benötigen wir jedoch die schwächere Aussage, daß sich die Gleichheit $[\tilde{A}:\tilde{T}] = [A:T]$ immer herstellen läßt, indem man den endlichen Monomorphismus $T \hookrightarrow A$ geeignet wählt. Das ergibt sich aus dem nächsten Satz.

Zu A gibt es einen Epimorphismus $\varphi: T_m \longrightarrow A$. Der induzierte Homomorphismus $\tilde{\varphi}: \tilde{T}_m \longrightarrow \tilde{A}$ ist dann endlich ([5] §3 Satz 3). Es gibt also $f_1,\ldots,f_r \in \mathring{A}$ derart, daß $\tilde{A} = \sum_{\rho=1}^{r} \tilde{\varphi}(\tilde{T}_m)\tilde{f}_\rho$. Durch $\varphi(X_{m+\rho}) := f_\rho$, $\rho = 1,\ldots,r$, wird φ zu einem Epimorphismus $\varphi: T_n := T_m\langle\langle X_{m+1},\ldots,X_{m+r}\rangle\rangle \longrightarrow A$ fortgesetzt, und nach Konstruktion ist $\tilde{\varphi}: \tilde{T}_n \longrightarrow \tilde{A}$ ebenfalls surjektiv.

Satz 1.6: k sei algebraisch abgeschlossen, dann gibt es zu jedem Polynom $p(A_{11},A_{12},\ldots,A_{nn}) \in o[A_{11},A_{12},\ldots,A_{nn}]$, $p \neq 0$, eine lineare Koordinatentransformation $Y_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}X_\nu$, $\mu = 1,\ldots,n$, $a_{\mu\nu} \in E$, von T_n mit

(1) $|\det(a_{\mu\nu})| = 1$, d.h. die Matrix $(\tilde{a}_{\mu\nu})$ definiert eine lineare Koordinatentransformation von $\tilde{T}_n = \mathfrak{o}[X_1,\ldots,X_n]$,

(2) $p(\tilde{a}_{11},\ldots,\tilde{a}_{nn}) \neq 0$,

(3) $\tilde{A}$ liegt endlich und separiert über $\tilde{\varphi}(\mathfrak{o}[Y_1,\ldots,Y_d]) \cong \tilde{T}_d$,

(4) A ist endlich über $\varphi(k\langle\langle Y_1,\ldots,Y_d\rangle\rangle) \cong T_d$.

Beweis: Wir stützen uns auf [1](24.5). Dieser Satz gilt auch für Polynomalgebren statt für Potenzreihenalgebren. Außerdem läßt er sich auf endlich viele gleichdimensionale Primideale verallgemeinern (vgl.[5] p.119 Fußnote 8). Wir wenden ihn in dieser Form auf $\tilde{T}_n$ und die d-dimensionalen minimalen Primideale $\mathfrak{P}_1,\ldots,\mathfrak{P}_r \subset \tilde{T}_n$ zu $\ker\tilde{\varphi}$ an. Es gibt also eine lineare Koordinatentransformation $Y_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} \tilde{a}_{\mu\nu} X_\nu$, $\mu = 1,..,n$, $\tilde{a}_{\mu\nu} \in \mathfrak{o}$, so daß (2) und (3) erfüllt sind. Für irgendein System $a_{\mu\nu} \in E$ von Urbildern der $\tilde{a}_{\mu\nu}$ gilt dann (1), und (4) folgt aus (3) mit dem folgenden Satz, QED.

Aus den beiden Endlichkeitssätzen [7] Prop.4.2 und [5] §3 Satz 3 ergibt sich ein weiterer Endlichkeitssatz:

Satz 1.7: Sei $\varphi : A \longrightarrow B$ ein k-Algebrahomomorphismus beliebiger k-affinoider Algebren A und B derart, daß der induzierte $\mathfrak{o}$-Algebrahomomorphismus $\tilde{\varphi} : \tilde{A} \longrightarrow \tilde{B}$ endlich ist, dann ist auch φ endlich.

Beweis: a) Zunächst reduzieren wir die Behauptung auf den Fall von Monomorphismen $\varphi : T_d \hookrightarrow B$ mit injektivem $\tilde{\varphi}$: Aufgrund des Normalisierungssatzes für $\mathfrak{o}$-affine Algebren gibt es einen endlichen $\mathfrak{o}$-Algebramonomorphismus $\tilde{\psi} : \tilde{T}_d \longrightarrow \tilde{B}$ mit $\tilde{\psi}(\tilde{T}_d) \subset \tilde{\varphi}(\tilde{A})$. Wir wählen Urbilder $f_\delta \in \varphi(\mathring{A}) \subset B$ der $\tilde{\psi}(X_\delta)$, $\delta = 1,\ldots,d$. Wegen $\varphi(\mathring{A}) \subset (\varphi(A))^\circ$ (§1.0) sind die

f_δ potenzbeschränkt in der k-affinoiden Algebra $\varphi(A)$, so daß durch $X_\delta \rightsquigarrow f_\delta$ ein Homomorphismus $T_d \longrightarrow \varphi(A)$ definiert wird. Nach Konstruktion wird $\tilde{\varphi}$ von dem zusammengesetzten Homomorphismus $\psi : T_d \longrightarrow \varphi(A) \hookrightarrow B$ induziert. Da mit $\tilde{\psi}$ auch ψ injektiv ist, und da $\tilde{\psi}$ endlich ist, ist nach dem vorausgesetzten Spezialfall auch ψ und dann erst recht φ endlich.

b) Sei jetzt $\varphi : T_d \hookrightarrow B$ und $\tilde{\varphi}$ injektiv, dann ist φ isometrisch bzgl. der Supremumnorm. φ läßt sich zu einem k-Algebraepimorphismus $\psi : T_{d+n} = T_d\langle\langle Y_1,\dots,Y_n\rangle\rangle \longrightarrow B$ fortsetzen. Setzen wir $y_\nu := \psi(Y_\nu)$, $\nu = 1,\dots,n$, dann ist $B = T_d\langle\langle y_1,\dots,y_n\rangle\rangle$ und $B_o := \psi(\mathring{T}_{d+n}) = \mathring{T}_d\langle\langle y_1,\dots,y_n\rangle\rangle \subset \mathring{B}$. Aufgrund von [7] Prop.4.2 sind wir fertig, wenn wir gezeigt haben, daß $\bar{B} := B_o/\mathfrak{m}B_o$ endlicher $\tilde{T}_d = \mathring{T}_d/\mathfrak{m}\mathring{T}_d$-Modul ist ($\mathfrak{m} \subset E$ sei das Bewertungsideal): Wegen $\mathfrak{m}B_o = \psi(\mathfrak{m}\mathring{T}_{d+n}) = \psi(\mathcal{J}(T_{d+n})) \subset \mathcal{J}(B)$ gibt es einen natürlichen Homomorphismus $\beta : \bar{B} \longrightarrow \tilde{B}$. $\ker \beta$ besteht nur aus nilpotenten Elementen: Sei $f \in B_o$ und $\tilde{f} = 0$, dann ist $|f| < 1$, so daß $f^\rho \longrightarrow 0$ ([4] III §6 Satz 6). Da $\mathfrak{m}B_o$ in B offen ist, gibt es also ein r mit $f^r \in \mathfrak{m}B_o$, woraus die Behauptung folgt.

Da $\tilde{\varphi} = \tilde{\psi}|T_d$ nach Voraussetzung endlich ist, sind $\tilde{y}_1,\dots,\tilde{y}_n \in \tilde{B}$ ganz über $\tilde{T}_d$. Es gibt also Relationen $\sum_{\mu=0}^{m_\nu} \tilde{a}_{\mu\nu}\tilde{y}_\nu^\mu = 0$, $\tilde{a}_{\mu\nu} \in \tilde{T}_d$, $\tilde{a}_{m_\nu\nu} = 1$, $\nu = 1,\dots,n$. Hieraus folgt für die Bilder $\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_n$ der $y_1,\dots,y_n$ in $\bar{B}$ $\sum_{\mu=0}^{m_\nu} \tilde{a}_{\mu\nu}\bar{y}_\nu^\mu \in \ker \beta$, d.h. die Summe ist nilpotent, $\nu = 1,\dots,n$. Daher sind auch $\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_n$ ganz über $\tilde{T}_d$, so daß $\bar{B} = \tilde{T}_d[\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_n]$ endlicher $\tilde{T}_d$-Modul ist, QED.

§2 Die Ordnung einer Funktion in einem Punkt eines eindimensionalen k-affinoiden Raumes

0. Die Voraussetzungen und Bezeichnungen dieses Abschnitts sind für den Rest der Arbeit verbindlich.

Jeder k-affinoiden Algebra A ist bis auf Isomorphie eindeutig ein k-affinoider Raum $\mathfrak{X} = (X, \mathscr{K}, A)$ im Sinne von [4] II §1.3 zugeordnet. Ist $\tilde{X}$ eine zu der $\mathscr{H}$-affinen Algebra $\tilde{A}$ gehörige $\mathscr{H}$-affine Menge, so wollen wir das Paar $(\tilde{X}, \tilde{A})$ einen zu $\mathfrak{X}$ gehörigen $\mathscr{H}$-affinen Raum nennen. Er ist durch A wieder bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Der Grundkörper k sei jetzt stets algebraisch abgeschlossen. Die Nullstellengebilde der maximalen Ideale von A sind dann einelementig, und umgekehrt ist für jeden Punkt $x \in X$ das Ideal der in x verschwindenden Funktionen maximal. Wir haben also eine bijektive Zuordnung $X \longleftrightarrow \operatorname{Max} A$, so daß der k-affinoide Raum $\mathfrak{X}$ das gleiche ist wie der zu $\operatorname{Max} A$ gehörige k-geringte Raum im Sinne von [7] §9. Da mit k auch $\mathscr{H}$ algebraisch abgeschlossen ist, hat man ebenfalls eine bijektive Zuordnung $\tilde{X} \longleftrightarrow \operatorname{Max} \tilde{A}$. Diese Bijektion zwischen den Punkten und den maximalen Idealen der Strukturalgebra eines k-affinoiden oder $\mathscr{H}$-affinen Raumes ist verträglich mit den Morphismen der entsprechenden Räume. Wir werden daher im folgenden ohne weiteren Hinweis von der Sprache der Punkte zu der der maximalen Ideale und umgekehrt übergehen.

In [7] Th.6.4 wird gezeigt, daß die durch $\mathfrak{m} \rightsquigarrow \tilde{\mathfrak{m}}$ gegebene Abbildung $\operatorname{Max} A \longrightarrow \operatorname{Max} \tilde{A}$ surjektiv ist. Die davon induzierte Abbildung $X \longrightarrow \tilde{X}$ ist dann ebenfalls surjektiv.

Die Bilder eines Elementes x und einer Teilmenge M von X in $\tilde{X}$ bezeichnen wir wieder mit $\tilde{x}$ bzw. $\tilde{M}$. Diese natürlichen Abbildungen von k-affinoiden Mengen auf die zugehörigen $\mathfrak{X}$-affinen Mengen sind verträglich mit den Morphismen k-affinoider Räume zusammen mit den induzierten Morphismen der zugehörigen $\mathfrak{X}$-affinen Räume.

Schließlich setzen wir noch voraus, daß der k-affinoide Raum $\mathfrak{X}$ rein eindimensional und k-reduziert ist, d.h. daß die Strukturalgebra A rein eindimensional und reduziert ist. Nach [4] III §5 Satz 3 und §8 Satz 2 ist dann $\mathfrak{X}$ auch ein reduzierter Raum, d.h. jeder Halm $\mathcal{K}_x$, $x \in X$, der Strukturgarbe $\mathcal{K}$ von X ist reduziert. Man weiß dann weiter ([4] III §8 p.472), daß $\mathfrak{X}$ nur in endlich vielen Punkten nicht regulär ist.

1. Ist R ein Ring und M ein R-Modul, so bezeichnen wir mit $l_R(M)$ $(\leq \infty)$ die Länge des R-Moduls M, das ist die gemeinsame Länge aller Kompositionsketten von M. Mit $l(R) := l_R(R)$ bezeichnen wir die Länge von R als Modul über sich selbst. Für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset R$ gilt $l(R/\mathfrak{a}) = l_R(R/\mathfrak{a})$.

Ist R ein regulärer lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$, dann ist die Ordnung eines Elementes $a \in R$ bekanntlich erklärt durch $\operatorname{ord} a := \max\{\rho : a \in \mathfrak{m}^\rho\} \leq \infty$. Hat R die Dimension eins, d.h. ist $\mathfrak{m}$ Hauptideal, dann gilt

$$\operatorname{ord} a = l(R/Ra) .$$

Beweis: Sei $\mathfrak{m} = Rb$, $b \in R$, und o.E. $r := \operatorname{ord} a < \infty$, dann gibt es eine Einheit $e \in R$ mit $a = eb^r$. Die echte Kette $(0) \subset Rb^{r-1}/Rb^r \subset \ldots \subset Rb/Rb^r \subset R/Rb^r = R/Ra$ ist eine Kompositionskette, denn die Moduln $(Rb^\rho/Rb^r)/(Rb^{\rho+1}/Rb^r) \simeq$

$Rb^{\varrho}/Rb^{\varrho+1} \simeq R/Rb = R/\mathfrak{m}$, $\varrho = 0,\ldots,r-1$, sind einfache Moduln. Es gilt also $l(R/Ra) = r$, qed.

Definition: Sei $x \in X$ und $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$ das Ideal der in x verschwindenden Funktionen. Sei $f \in A$ und $f_{\mathfrak{m}} \in A_{\mathfrak{m}}$ das natürliche Bild von f im Quotientenring $A_{\mathfrak{m}}$ von A . Falls X irreduzibel (d.h. A nullteilerfrei) ist, heißt

$$\operatorname{ord}_x f := l(A_{\mathfrak{m}}/A_{\mathfrak{m}} f_{\mathfrak{m}})$$

die Ordnung von f im Punkte x . Für beliebiges X sei

$$\operatorname{ord}_x f := \sum_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Min} A,\ \mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}} \operatorname{ord}_x (f \bmod \mathfrak{p}) .$$

Die rechte Seite ist bereits erklärt, da $A/\mathfrak{p}$ eine nullteilerfreie eindimensionale k-affinoide Algebra ist, falls $\mathfrak{p}$ ein minimales Primideal von A ist. Wir schreiben oft $\operatorname{ord}_{\mathfrak{m}} f$ für $\operatorname{ord}_x f$.

Falls $\mathfrak{m}$ nur ein minimales Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ enthält, ist $\operatorname{ord}_x f = l(A_{\mathfrak{m}}/A_{\mathfrak{m}} f_{\mathfrak{m}})$, denn $(A/\mathfrak{p})_{\mathfrak{m}/\mathfrak{p}} \simeq A_{\mathfrak{m}}$ ([8] IV §10 Th.18).

Satz 2.1: Sei $x \in X$ und $\mathfrak{m}$ das zugehörige maximale Ideal. Sei $f \in A$ und $f_x \in \mathcal{K}_x$ sein Keim im Punkte x . Das natürliche Bild $f_{\mathfrak{m}}$ von f in $A_{\mathfrak{m}}$ sei Nichtnullteiler, dann gilt $A_{\mathfrak{m}}/A_{\mathfrak{m}} f_{\mathfrak{m}} \simeq \mathcal{K}_x/\mathcal{K}_x f_x$.

Beweis: Da $f_{\mathfrak{m}}$ in keinem minimalen Primideal von $A_{\mathfrak{m}}$ enthalten ist, besitzt $A_{\mathfrak{m}}/A_{\mathfrak{m}} f_{\mathfrak{m}}$ als einziges Primideal sein maximales Ideal, d.h. $A_{\mathfrak{m}}/A_{\mathfrak{m}} f_{\mathfrak{m}}$ ist ein artinscher Ring. Seine maximal-ideal-adische Topologie ist also diskret, so daß dieser Ring gleich seiner meaximal-ideal-adischen Komplettierung ist. Mit [8] VIII §2 Th.6 Cor.2 ergibt sich $A_{\mathfrak{m}}/A_{\mathfrak{m}} f_{\mathfrak{m}} = \widehat{A_{\mathfrak{m}}/A_{\mathfrak{m}} f_{\mathfrak{m}}} \simeq \hat{A}_{\mathfrak{m}}/\hat{A}_{\mathfrak{m}} f_{\mathfrak{m}}$. Da mit $f_{\mathfrak{m}}$ auch f_x

Nichtnullteiler ist, folgt ebenso $\mathcal{K}_x/\mathcal{K}_x f_x \simeq \hat{\mathcal{K}}_x/\hat{\mathcal{K}}_x f_x$. Der natürliche Homomorphismus $A \longrightarrow \mathcal{K}_x$, der jeder Funktion ihren Keim im Punkte x zuordnet, induziert einen Monomorphismus $A_{\mathfrak{m}} \hookrightarrow \mathcal{K}_x$ und dieser nach [7] Prop.9.3 einen Isomorphismus $\hat{A}_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{\simeq} \hat{\mathcal{K}}_x$, so daß $A_{\mathfrak{m}}/A_{\mathfrak{m}} f_{\mathfrak{m}} \simeq \hat{A}_{\mathfrak{m}}/\hat{A}_{\mathfrak{m}} f_{\mathfrak{m}} \simeq \hat{\mathcal{K}}_x/\hat{\mathcal{K}}_x f_x \simeq \mathcal{K}_x/\mathcal{K}_x f_x$, QED.

Aus diesem Satz folgt unmittelbar, daß die Ordnung in einem Punkt $x \in X$ eine lokale Eigenschaft ist, wenn $\mathfrak{m}$ nur ein minimales Primideal von A enthält, spezeill also wenn X irreduzibel ist. Zusammen mit der Bemerkung zu Beginn dieses Abschnitts besagt der Satz noch, daß unser Ordnungsbegriff in einem regulären Punkt $x \in X$ mit dem üblichen Ordnungsbegriff in dem regulären lokalen Ring $\mathcal{K}_x$ übereinstimmt.

Regeln: Für $x \in X$, $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$ und $f,g \in A$ gilt

(1) $0 \leq \operatorname{ord}_x f \leq \infty$,

(2) $\operatorname{ord}_x f = 0 \iff f(x) \neq 0$,

(3) $\operatorname{ord}_x f = \infty \iff f \in \bigcup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Min} A,\ \mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}} \mathfrak{p}$,

(4) $\operatorname{ord}_x(fg) = \operatorname{ord}_x f + \operatorname{ord}_x g$,

(5) $\operatorname{ord}_x(f+g) \geq \min(\operatorname{ord}_x f, \operatorname{ord}_x g)$, falls x ein regulärer Punkt von X ist. Im Falle $\operatorname{ord}_x f \neq \operatorname{ord}_x g$ gilt das Gleichheitszeichen.

Beweis: (1) und (2) folgen direkt aus der Definition, und (5) ergibt sich aus der entsprechenden Ungleichung in regulären lokalen Ringen.

(3): Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Min} A$, $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$ und $f_{\mathfrak{p}}$ das natürliche Bild von f

in $A/\mathfrak{p} \subset (A/\mathfrak{p})_{\mathfrak{m}/\mathfrak{p}}$, dann gilt $l((A/\mathfrak{p})_{\mathfrak{m}/\mathfrak{p}}/(A/\mathfrak{p})_{\mathfrak{m}/\mathfrak{p}}\, f_{\mathfrak{p}}) < \infty$ genau dann, wenn $(A/\mathfrak{p})_{\mathfrak{m}/\mathfrak{p}}/(A/\mathfrak{p})_{\mathfrak{m}/\mathfrak{p}}\, f_{\mathfrak{p}}$ artinsch ist ([8] III §11 Th.21) und dies wiederum genau dann, wenn $f_{\mathfrak{p}} \neq 0$, d.h. $f \notin \mathfrak{p}$.

(4): Es reicht, die Behauptung für irreduzible X zu beweisen. Gilt $f = 0$ oder $g = 0$, so werden nach (3) beide Seiten von (4) unendlich. Seien also $f,g \neq 0$. Wir setzen $R := A_{\mathfrak{m}}$, $a := f_{\mathfrak{m}}$, $b := g_{\mathfrak{m}}$. Ra/Rab ist ein R-Untermodul von R/Rab , so daß ([8] III §11 Th.20) $l_R(R/Rab) = l_R((R/Rab)/(Ra/Rab)) + l_R(Ra/Rab)$. Da R nullteilerfrei ist, ist die Homothetie $r \rightsquigarrow ra$, $r \in R$, ein R-Modulisomorphismus $R \xrightarrow{\sim} Ra$, so daß $R/Rb \simeq Ra/Rab$. Da außerdem $R/Ra \simeq (R/Rab)/(Ra/Rab)$, gilt also $l_R(R/Rab) = l_R(R/Ra) + l_R(R/Rb)$, QED.

Sehr nützlich ist das folgende Regularitätskriterium.

Satz 2.2: Ein Punkt $x \in X$ ist genau dann regulär, wenn es eine Funktion $f \in A$ gibt mit $\mathrm{ord}_x f = 1$.

Beweis: $\mathfrak{m}$ sei das zu x gehörige maximale Ideal von A. Ist x , d.h. $\mathcal{K}_x$ regulär, dann ist es auch die maximalideal-adische Komplettierung $\hat{\mathcal{K}}_x$. Wegen $\hat{A}_{\mathfrak{m}} \simeq \hat{\mathcal{K}}_x$ ([7] prop.9.3) ist dann auch $A_{\mathfrak{m}}$ regulär ([8] VIII §11 p.301). Da $A_{\mathfrak{m}}$ speziell nullteilerfrei ist, enthält $\mathfrak{m}$ nur ein minimales Primideal $\mathfrak{p}$ von A . Da $A_{\mathfrak{m}}$ ein eindimensionaler regulärer lokaler Ring ist, ist sein maximales Ideal ein Hauptideal $A_{\mathfrak{m}}g$, $g \in A_{\mathfrak{m}}$. g besitzt eine Darstellung $g = \frac{g_1}{g_2}$ mit $g_1, g_2 \in A/\mathfrak{p} \subset A_{\mathfrak{m}}$ und $g_2 \notin \mathfrak{m}/\mathfrak{p}$, d.h. g_2 ist Einheit in $A_{\mathfrak{m}}$. Für ein Urbild f von g_1 in A gilt dann $\mathrm{ord}_x f =$

$l(A_m/A_m g_1) = l(A_m/A_m g) = l(k) = 1$. Gilt umgekehrt $\operatorname{ord}_x f = 1$, dann ist $\sum_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Min} A,\ \mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}} \operatorname{ord}_x(f \bmod \mathfrak{p}) = 1$. Wegen $f(x) = 0$ ist jeder Summand > 0 , so daß $\mathfrak{m}$ genau ein minimales Primideal enthält und $l(A_m/A_m f_m) = 1$ ist. $A_m/A_m f_m$ ist also ein Körper, d.h. f_m erzeugt das maximale Ideal von A_m . A_m und damit auch $\mathcal{H}_x$ (s.o.) sind also reguläre lokale Ringe, QED.

2. Fassen wir $(X,\mathcal{H},A)$ als k-affinoiden Unterraum eines $(E^n,\mathcal{O}^{(n)},T_n)$ auf, so können wir aufgrund des Normalisierungssatzes ([4] III §4.1 und 2) o.E. annehmen, daß die von der natürlichen Projektion $E^n \longrightarrow E^1$ induzierte Abbildung $\pi : X \longrightarrow E^1$ surjektiv und endlich ist, und daß der induzierte k-Algebrahomorphismus $T = k\langle\langle X_1 \rangle\rangle \longrightarrow A$ injektiv und endlich ist.

Wir wollen nun die wichtige Tatsache beweisen, daß die Ordnung von $N_T^A(f) \in T$ in einem Punkt $x_1 \in E^1$ die Ordnungen von $f \in A$ in den über x_1 liegenden Punkten $\pi^{-1}(x_1)$ addiert. Dabei benutzen wir die Formel [8] VIII §10 Th.24 Cor.1, die das Verhalten von Multiplizitäten unter endlichen Ringerweiterungen beschreibt. Sei a Nichtnullteiler eines eindimensionalen lokalen Ringes R , dann gilt nach [8] VIII §9 Th.20 für die Multiplizität $e(Ra)$ des Hauptideals Ra bei ausreichend großem r $e(Ra) = l(R/Ra^r) - l(R/Ra^{r-1}) = l(R/Ra^r) - l(Ra/Ra^r) = l(R/Ra)$. Hieraus folgt

$$\operatorname{ord}_m f = e(A_m f_m)$$

für jedes $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$, welches nur ein minimales Primideal enthält, und jedes $f \in A$, dessen Bild f_m in A_m Nichtnullteiler ist, d.h. (Regel (3)) für das $\operatorname{ord}_m f < \infty$ ist.

Damit können wir die oben zitierte Formel auf unseren Fall übertragen:

Satz 2.3: Sei A nullteilerfrei und B eine k-affinoide Unteralgebra derart, daß A endlicher B-Modul ist. Für $\mathfrak{n} \in \operatorname{Max} B$ und $f \in B$ gilt dann

$$[A:B]\ \operatorname{ord}_{\mathfrak{n}} f = \sum_{\substack{\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A \\ \mathfrak{m} \cap B = \mathfrak{n}}} \operatorname{ord}_{\mathfrak{m}} f .$$

Beweis: Regel (3) erledigt den Fall $f = 0$. Sei also $f \neq 0$. Für das multiplikative System $M := B - \mathfrak{n}$ ist B_M ein lokaler Ring. Da A endlicher B-Modul ist, ist auch A_M ein endlicher B_M-Modul. Da A_M und B_M nullteilerfrei und eindimensional sind, erfüllen sie also alle Voraussetzungen, die in [8] VIII §10 Th.24 Cor.1 an die dortigen B und A gestellt sind. A_M ist also ein Halbstellenring. Sei $\operatorname{Max} A_M = \{\mathfrak{P}_i\}$, $\mathfrak{q} := B_M f$ und $\mathfrak{q}_i \subset A_M$ die zu $\mathfrak{P}_i$ gehörige Primärkomponente von $A_M \mathfrak{q} = A_M f$, dann liefert der oben zitierte Satz $[A:B]\ e(B_M f) = \sum_i e(\mathfrak{q}_i)$. Wir brauchen nur noch die rechte Seite umzuformen: Für $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$ ist $\mathfrak{m} \cap B \neq \mathfrak{n}$ genau, wenn $\mathfrak{m} \cap M = \emptyset$. Nach [8] IV §10 Th.16 Cor.1 gilt dann $\operatorname{Max} A_M = \{A_M \mathfrak{m} : \mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A,\ \mathfrak{m} \cap M = \emptyset\} = \{A_M \mathfrak{m} : \mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A,\ \mathfrak{m} \cap B = \mathfrak{n}\}$. Sei also $\mathfrak{m}_i \in \operatorname{Max} A$ mit $A_M \mathfrak{m}_i = \mathfrak{P}_i$, dann ist $(A_M)_{\mathfrak{P}_i} = A_{\mathfrak{m}_i}$ und (wegen) $A_{\mathfrak{m}_i} \mathfrak{q}_i = A_{\mathfrak{m}_i} \mathfrak{q} = A_{\mathfrak{m}_i} f$ ([8] IV §10 Th.17) $e(\mathfrak{q}_i) = e(A_{\mathfrak{m}_i} \mathfrak{q}_i) = e(A_{\mathfrak{m}_i} f)$. Damit folgt

$$[A:B]\ e(B_M f) = \sum_{\substack{\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A \\ \mathfrak{m} \cap B = \mathfrak{n}}} e(A_{\mathfrak{m}} f) , \quad \text{QED.}$$

Satz 2.4: Für $\mathfrak{m}_1 \in \operatorname{Max} T$ und $f \in A$ gilt

$$\operatorname{ord}_{\mathfrak{m}_1} N_T^A(f) = \sum_{\substack{\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A \\ \mathfrak{m} \cap T = \mathfrak{m}_1}} \operatorname{ord}_{\mathfrak{m}} f .$$

Beweis: a) Zunächst reduzieren wir die Behauptung auf den Fall eines nullteilerfreien A. Seien $\mathfrak{P}_1,\dots,\mathfrak{P}_r$ die minimalen Primideale von A und $A_\rho := A/\mathfrak{P}_\rho$, $\rho = 1,\dots,r$. f_ρ bezeichne das natürliche Bild von f und $\mathfrak{m}_\rho$ das von $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$ in A_ρ, $\rho = 1,\dots,r$. Gilt jetzt der Satz für die nullteilerfreien A_ρ, so ist $\operatorname{ord}_{\mathfrak{m}_1} N_T^A(f) = \operatorname{ord}_{\mathfrak{m}_1} \prod_{\rho=1}^{r} N_T^{A_\rho}(f_\rho)$

$= \sum_{\rho=1}^{r} \operatorname{ord}_{\mathfrak{m}_1} N_T^{A_\rho}(f_\rho) = \sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\substack{\mathfrak{m} \supset \mathfrak{P}_\rho \\ \mathfrak{m} \cap T = \mathfrak{m}_1}} \operatorname{ord}_{\mathfrak{m}_\rho} f_\rho = \sum_{\mathfrak{m} \cap T = \mathfrak{m}_1} \sum_{\mathfrak{P}_\rho \subset \mathfrak{m}} \operatorname{ord}_{\mathfrak{m}_\rho} f_\rho$

$= \sum_{\mathfrak{m} \cap T = \mathfrak{m}_1} \operatorname{ord}_{\mathfrak{m}} f$.

b) Sei jetzt A nullteilerfrei. Wir beweisen die Behauptung zunächst für die (nach [7] Th.4.4) k-affinoide Algebra $B := T[f] \subset A$ und die Funktion $f \in B$. $M := T - \mathfrak{m}_1$ ist ein multiplikatives System in B, und es gilt (vgl. Beweis von Satz 2.3) $\operatorname{Max} B_M = \{ B_M \mathfrak{n} : \mathfrak{n} \in \operatorname{Max} B,\ \mathfrak{n} \cap T = \mathfrak{m}_1 \}$. Da $B_M/B_M f$ artinsch ist (wir setzen o.E. $f \neq 0$ voraus), folgt aus [2] IV §2 Prop.9 Cor.1 $B_M/B_M f \simeq \bigoplus_{\mathfrak{n} \in \operatorname{Max}(B_M/B_M f)} (B_M/B_M f)_{\mathfrak{n}}$

$\simeq \bigoplus_{\substack{\mathfrak{n} \in \operatorname{Max} B \\ \mathfrak{n} \cap T = \mathfrak{m}_1}} B_{\mathfrak{n}}/B_{\mathfrak{n}} f$. Für den Beweis der letzten Isomorphie benutze man $(B_M)_{B_M \mathfrak{n}} \simeq B_{\mathfrak{n}}$ und die Vertauschbarkeit von Faktor- und Quotientenringbildung. Mit der Additivität der Länge einer direkten Summe folgt $l(B_M/B_M f) = \sum_{\substack{\mathfrak{n} \in \operatorname{Max} B \\ \mathfrak{n} \cap T = \mathfrak{m}_1}} l(B_{\mathfrak{n}}/B_{\mathfrak{n}} f) = \sum_{\substack{\mathfrak{n} \in \operatorname{Max} B \\ \mathfrak{n} \cap T = \mathfrak{m}_1}} \operatorname{ord}_{\mathfrak{n}} f$. Es reicht also zu zeigen, daß $B_M/B_M f \simeq T_{\mathfrak{m}_1}/T_{\mathfrak{m}_1} N_T^B(f)$. Sei $f^r + h_{r-1} f^{r-1} + \dots + h_0 = 0$, $h_\rho \in T$, die Minimalgleichung von f über T, dann ist $h_0 = N_T^B(f)$ wegen $[B:T] = r$. Wir zeigen $B_M f \cap T_M = T_M h_0$: Da $B = \sum_{\rho=0}^{r-1} T f^\rho$, ist auch $B_M = \sum_{\rho=0}^{r-1} T_M f^\rho$. Jedes $g \in B_M$

besitzt also eine Darstellung $g = g_0 + g_1 f + \ldots + g_{r-1} f^{r-1}$ mit $g_\rho \in T_M$. Dann ist $gf = g_0 f + g_1 f^2 + \ldots + g_{r-1} f^r = -g_{r-1} h_0 + (g_0 - g_{r-1} h_1) f + \ldots + (g_{r-2} - g_{r-1} h_{r-1}) f^{r-1}$. Da $1, f, \ldots, f^{r-1}$ linear unabhängig über $Q(T)$ sind, folgt aus $gf \in T_M \subset Q(T)$ $gf = -g_{r-1} h_0 \in T_M h_0$, d.h. $B_M f \cap T_M \subset T_M h_0$. Die andere Inklusion ist trivial. Es folgt jetzt, daß der natürliche Homomorphismus $T_M/T_M h_0 \longrightarrow B_M/B_M f$ injektiv ist. Er ist auch surjektiv, denn die Bilder von $1, f, \ldots, f^{r-1}$ erzeugen, d,h, 1 allein erzeugt $B_M/B_M f$ über $T_M/T_M h_0$. Damit haben wir gezeigt, daß $\operatorname{ord}_{\mathfrak{M}_1} N_T^B(f) = \sum_{\substack{\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} B \\ \mathfrak{m} \cap T = \mathfrak{M}_1}} \operatorname{ord}_{\mathfrak{m}} f$.

c) Aus der letzten Gleichung und Satz 2.3 ergibt sich die Behauptung für nullteilerfreie A : Wegen $[A:T] = [A:B][B:T]$ gilt $(N_T^B(f))^{[A:B]} = N_T^A(f)$, denn das Hauptpolynom von f ist eine Potenz des Minimalpolynoms. Da in dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Max} A & \longrightarrow & \operatorname{Max} B \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \operatorname{Max} T & \end{array}$$

alle Abbildungen surjektiv sind ([8] V §2 Th.3 und Compl.2), folgt insgesamt $\sum_{\substack{\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A \\ \mathfrak{m} \cap T = \mathfrak{M}_1}} \operatorname{ord}_{\mathfrak{m}} f =$

$$\sum_{\substack{\mathfrak{n} \in \operatorname{Max} B \\ \mathfrak{n} \cap T = \mathfrak{M}_1}} \sum_{\substack{\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A \\ \mathfrak{m} \cap B = \mathfrak{n}}} \operatorname{ord}_{\mathfrak{m}} f = \sum_{\substack{\mathfrak{n} \in \operatorname{Max} B \\ \mathfrak{n} \cap T = \mathfrak{M}_1}} [A:B] \operatorname{ord}_{\mathfrak{n}} f =$$

$$[A:B] \operatorname{ord}_{\mathfrak{M}_1} N_T^B(f) = \operatorname{ord}_{\mathfrak{M}_1} (N_T^B(f))^{[A:B]} = \operatorname{ord}_{\mathfrak{M}_1} N_T^A(f), \text{ QED.}$$

§3 Invarianz der Ordnung beim Übergang zum $\mathfrak{X}$-Affinen

Da der k-affinoide Raum $(X,\mathcal{X},A)$ rein eindimensional ist, ist auch der zugehörige $\mathfrak{X}$-affine Raum $(\tilde{X},\tilde{A})$ rein eindimensional (Hilfssatz 1.2(2)). A ist also eine rein eindimensionale reduzierte $\mathfrak{X}$-affine Algebra. In §2 haben wir die Ordnung einer Funktion $f \in A$ mit Hilfe der Struktur-Algebra A definiert und dabei nur algebraische Eigenschaften von A benutzt, die auch von $\tilde{A}$ erfüllt werden. Demnach können wir die Definition der Ordnung und ebenso die Regeln und die Sätze 2.2, 2.3 und 2.4 wortwörtlich auf den $\mathfrak{X}$-affinen Raum $(\tilde{X},\tilde{A})$ übertragen.

Grundlegend für alles weitere ist nun die Tatsache, daß die Ordnung des Bildes $\tilde{f} \in \tilde{A}$ einer Funktion $f \in A$, $|f| = 1$, in einem Punkt $\tilde{x} \in \tilde{X}$ die Ordnungen von f in allen Urbildpunkten von $\tilde{x}$ addiert. Genauer:

Satz 3.1: Sei $P \in \tilde{X}$ und $f \in \mathring{A}$ derart, daß $\tilde{f}$ in $\tilde{A}$ Nichtnullteiler ist, dann gilt $\operatorname{ord}_P \tilde{f} = \sum_{\substack{x \in X \\ \tilde{x}=P}} \operatorname{ord}_x f$.

Die Summe ist stets endlich, denn da A noethersch und mit $\tilde{f}$ auch f Nichtnullteiler ist, besitzt f nur endlich viele Nullstellen, die alle von endlicher Ordnung sind. Der Satz wird falsch, wenn man für $\tilde{f}$ auch Nullteiler zuläßt. Ist nämlich $\tilde{f}$ Nullteiler, f jedoch nicht (mit A ist i.a. nicht auch $\tilde{A}$ nullteilerfrei, z.B.(Satz 1.1) $A = T_2/T_2(X_1X_2 - a)$, $a \in k$, $0 < |a| < 1$) dann ist stets (§2 Regel 63)) $\operatorname{ord}_x f < \infty$, $x \in X$, während $\operatorname{ord}_P \tilde{f} = \infty$ ist in allen Punkten P einer irreduziblen Komponente von $\tilde{X}$.

Beweis: a) Zunächst beweisen wir den Satz für $A = k\langle\langle X_1\rangle\rangle$. $T := k\langle\langle X_1\rangle\rangle$ ist ein faktorieller Ring ([4] I §3 Satz 1), und die Primelemente von T sind bis auf multiplikative Einheiten genau die linearen Polynome $X_1 - x$, $x \in E^1$, denn sie erzeugen die maximalen Ideale von T . Daher gilt $\mathrm{ord}_x(X_1-x) = 1$ und entsprechend $\mathrm{ord}_{\tilde{x}}(X_1-\tilde{x}) = 1$. Sei $f = h\prod_{\nu=1}^{n}(X_1-x_\nu)^{r_\nu}$ die Primfaktorzerlegung von f , wobei h eine Einheit ist. Gelte o.E. $\tilde{x}_\nu = P$, $\nu = 1,\ldots,m \leq n$, und $\tilde{x}_\nu \neq P$, $\nu = m+1,\ldots,n$. Da mit h auch $\tilde{h}$ Einheit ist ([4] I §1 Satz 2), ist $\tilde{f} = \tilde{h}\,(X_1-P)^{r_1+\ldots+r_m}\prod_{\nu=m+1}^{n}(X_1-x_\nu)^{r_\nu}$ die Primfaktorzerlegung von $\tilde{f}$ in $\tilde{T} = \mathfrak{X}[X_1]$. Hieraus folgt $\mathrm{ord}_P\tilde{f} = \sum_{\nu=1}^{m} r_\nu = \sum_{\nu=1}^{m}\mathrm{ord}_{x_\nu} f = \sum_{\substack{x\in E^1\\ \tilde{x}=P}}\mathrm{ord}_x f$.

b) Sei die Situation wie vor Satz 1.6 hergestellt, d.h. seien $(X,\mathcal{X},A)$ und $(\tilde{X},\tilde{A})$ Unterräume von $(E^n,\mathcal{O}^{(n)},T_n)$ bzw. $(\mathfrak{X}^n,\tilde{T}_n)$. Seien $P_1,\ldots,P_r \in \tilde{X}$ die Nullstellen von $\tilde{f}$ und $\tilde{x}_1^{(\varrho)},\ldots,\tilde{x}_n^{(\varrho)}$ die Koordinaten von P_ϱ in $\mathfrak{X}^n$. Nach Satz 1.6 können wir zu dem nicht identisch verschwindenden Polynom $p(A_{11},A_{12},\ldots,A_{nn}) := \prod_{\substack{\varrho,\sigma=1\\ \varrho\neq\sigma}}^{r}\left(\sum_{\nu=1}^{n} A_{1\nu}(\tilde{x}_\nu^{(\varrho)} - \tilde{x}_\nu^{(\sigma)})\right)$ über $\mathfrak{X}$ eine Koordinatentransformation $Y_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}X_\nu$, $\mu = 1,\ldots,n$, $a_{\mu\nu} \in E$, mit den Eigenschaften (1)-(4) von Satz1.6 finden. Aus (4) folgt mit [4] III §9 Satz 2, daß die von der natürlichen Projektion $E^n(y_1,\ldots,y_n) \longrightarrow E^1(y_1)$ induzierte Abbildung $\pi : X \longrightarrow E^1$ endlich und surjektiv ist. $\tilde{\pi} : X \longrightarrow \mathfrak{X}^1$ sei die von π induzierte Abbildung. Sind $\tilde{y}_1^{(\varrho)},\ldots,\tilde{y}_n^{(\varrho)}$ die neuen Koordinaten von P_ϱ , dann folgt aus (2)

$0 \neq p(\tilde{a}_{11},\ldots,\tilde{a}_{nn}) = \prod_{\varrho\neq\sigma} (\tilde{y}_1^{(\varrho)} - \tilde{y}_1^{(\sigma)})$, d.h. keine zwei Nullstellen von $\tilde{f}$ liegen bezüglich $\tilde{\pi}$ über ein und demselben Punkt aus $\mathfrak{X}^1$. Da die Behauptung für $\mathrm{ord}_P\tilde{f} = 0$ trivial ist, nehmen wir $\tilde{f}(P) = 0$ an. Aus dem $\mathfrak{X}$-affinen Analogon zu Satz 2.4 folgt dann $\mathrm{ord}_P\tilde{f} = \mathrm{ord}_{\tilde{\pi}(P)} N_{\tilde{T}}^{\tilde{A}}(\tilde{f})$. Da wegen Satz 1.6(3) $[\tilde{A}:\tilde{T}] = [A:T]$, folgt aus dem Korollar zu Satz 1.5 $N_{\tilde{T}}^{\tilde{A}}(\tilde{f}) = \widetilde{N_T^A(f)}$. Durch Anwendung des schon bewiesenen Spezialfalles a) und von Satz 2.4 erhält man daraus $\mathrm{ord}_P\tilde{f} = \mathrm{ord}_{\tilde{\pi}(P)} \widetilde{N_T^A(f)} = \sum_{\substack{y_1\in E^1 \\ \tilde{y}_1=\tilde{\pi}(P)}} \mathrm{ord}_{y_1} N_T^A(f) = \sum_{\substack{y_1\in E^1 \\ \tilde{y}_1=\tilde{\pi}(P)}} \sum_{\substack{x\in X \\ \pi(x)=y_1}} \mathrm{ord}_x f =$

$\sum_{\substack{x\in X \\ \tilde{\pi}(\tilde{x})=\tilde{\pi}(P)}} \mathrm{ord}_x f = \sum_{\substack{x\in X \\ \tilde{x}=P}} \mathrm{ord}_x f$. Die letzte Gleichung gilt, da P die einzige Nullstelle von $\tilde{f}$ über $\tilde{\pi}(P)$ ist, QED.

Korollar: Jeder Urbildpunkt $x \in X$ eines in $\tilde{X}$ regulären Punktes $\tilde{x}$ ist selbst regulär.

Beweis: Aufgrund des Regularitätskriteriums (Satz 2.2) gibt es eine Funktion $f \in \mathring{A}$ mit $\mathrm{ord}_{\tilde{x}}\tilde{f} = 1$, d.h. $\widetilde{f(x)} = \tilde{f}(\tilde{x}) = 0$. Wir können o.E. annehmen, daß $\tilde{f}$ kein Nullteiler ist, denn andernfalls addiere man zu f eine nach [6] I Prop.2 existierende Funktion $h \in \mathring{A}$ derart, daß $\tilde{h}$ genau auf den irreduziblen Komponenten von $\tilde{X}$ identisch verschwindet, auf denen es $\tilde{f}$ nicht tut. Nach §2 Regel (5) bleibt dabei die Ordnung im Punkt $\tilde{x}$ erhalten. Für die Funktion $g := f - f(x)$ gilt dann $\tilde{g} = \tilde{f}$ und $\mathrm{ord}_x g > 0$, so daß nach Satz 3.1 $\mathrm{ord}_x g = 1$. Das Regularitätskriterium liefert dann die Behauptung, QED.

§4 Überlagerungen und Verzweigungsordnung

Wir betrachten hier den k-affinoiden Raum $(X,\mathcal{K},A)$ und den zugehörigen $\mathcal{K}$-affinen Raum $(\tilde{X},\tilde{A})$ o.E. als Unterräume von $(E^n,\mathcal{O}^{(n)},T_n)$ bzw. $(\mathcal{K}^n,\tilde{T}_n)$ (vgl. Die Bemerkung vor Satz 1.6). Aufgrund von Satz 1.6 (die Separiertheitsaussage wird nicht benötigt) können wir weiter voraussetzen, daß von der natürlichen Projektion $E^n(x_1,\ldots,x_n) \longrightarrow E^1(x_1)$ induziert werden:

(1) endliche und surjektive Abbildungen

$$\pi : X \longrightarrow E^1 , \quad \tilde{\pi} : \tilde{X} \longrightarrow \mathcal{K}^1 , \text{ und}$$

(2) endliche Monomorphismen

$$T := k\langle\langle X_1 \rangle\rangle \hookrightarrow A , \quad \tilde{T} = \mathcal{K}[X_1] \hookrightarrow \tilde{A} .$$

Wenn diese Situation vorliegt, sagen wir, $(\pi,\tilde{\pi}): (X,\tilde{X}) \longrightarrow (E^1,\mathcal{K}^1)$ sei eine Überlagerung.

Definition: $(\pi,\tilde{\pi}): (X,\tilde{X}) \longrightarrow (E^1,\mathcal{K}^1)$ sei eine Überlagerung und u ein Punkt aus X, dann sind $x_1 - \pi(u)$ und $\tilde{x}_1 - \tilde{\pi}(\tilde{u})$ Funktionen aus $T \subset A$ bzw. $\tilde{T} \subset \tilde{A}$. Wir nennen die natürlichen Zahlen

$$v(u) := \operatorname{ord}_u(x_1 - \pi(u)) , \quad v(\tilde{u}) := \operatorname{ord}_{\tilde{u}}(\tilde{x}_1 - \tilde{\pi}(\tilde{u}))$$

die Verzweigungsordnungen von X bzw. $\tilde{X}$ im Punkte u bzw. $\tilde{u}$.

$v(u)$ und $v(\tilde{u})$ sind i.a. noch von der Wahl der Überlagerung $(\pi,\tilde{\pi})$ abhängig, welche wir deshalb im folgenden als fest gewählt voraussetzen.

Regeln: (1) $\sum_{u \in \pi^{-1}(u_1)} v(u) = [A:T] , \quad u_1 \in E^1 , \text{ und}$

$\sum_{\tilde{u} \in \tilde{\pi}^{-1}(\tilde{u}_1)} v(\tilde{u}) = [\tilde{A}:\tilde{T}] , \quad \tilde{u}_1 \in \mathcal{K}^1 .$

(2) $\sum_{\substack{y\in\pi^{-1}(u_1)\\ \tilde{y}=\tilde{u}}} v(y) = v(\tilde{u})$, $u\in X$, $u_1 = \pi(u)$.

Beweis: (1) Mit Satz 2.4 gilt $\sum_{u\in\pi^{-1}(u_1)} v(u) = \mathrm{ord}_{u_1} N_T^A(x_1-u_1)$ $= \mathrm{ord}_{u_1}(x_1-u_1)^{[A:T]} = [A:T]\,\mathrm{ord}_{u_1}(x_1-u_1) = [A:T]$. Ebenso beweist man die zweite Gleichung.

(2) Aus Satz 3.1 folgt $\sum_{\substack{y\in\pi^{-1}(u_1)\\ \tilde{y}=\tilde{u}}} v(y) = \sum_{\tilde{y}=\tilde{u}} \mathrm{ord}_y(x_1-u_1) =$ $\mathrm{ord}_{\tilde{u}}(\tilde{x}_1-\tilde{u}_1) = v(\tilde{u})$, QED.

Korollar: $[\tilde{A}:\tilde{T}] = [A:T]$.

Beweis: $[\tilde{A}:\tilde{T}] = \sum_{\tilde{u}\in\tilde{\pi}^{-1}(\tilde{u}_1)} v(\tilde{u}) = \sum_{\tilde{u}\in\tilde{\pi}^{-1}(\tilde{u}_1)} \sum_{\substack{y\in\pi^{-1}(u_1)\\ \tilde{y}=\tilde{u}}} v(y)$ $= \sum_{y\in\pi^{-1}(u_1)} v(y) = [A:T]$, QED.

Satz 4.1: Sei $u_1\in E^1$ derart, daß $\pi^{-1}(u_1)$ nur aus lokal irreduziblen Punkten besteht. Für $f\in A$ gilt dann

$$N_T^A(f)(u_1) = \prod_{u\in\pi^{-1}(u_1)} f(u)^{v(u)} .$$

Beweis: Wir setzen o.E. (vgl. §1.2) X als irreduzibel voraus. Mit Hilfe des Henselschen Lemmas bestimmen wir ein $t > 0$ derart, daß X eingeschränkt auf $E_t^n := \{x\in E^n : |x_1-u_1| \le t\}$ in irreduzible Komponenten zerfällt, für welche sich die Behauptung leicht beweisen läßt.

Seien $\omega_\nu\in T[X_\nu]$ die Minimalpolynome der Koordinatenfunktionen $x_\nu | X\in A$, $\nu = 2,\dots,n$, dann gilt $X\subset N(\omega_\nu)\subset E^n$ ($N(h)$ bezeichnet das Nullstellengebilde einer Funktion h). Wir bilden die Keime der in T gelegenen Koeffizienten von ω_ν im Punkte $u_1\in E^1$ und fassen ω_ν als Element von $\mathcal{O}_{u_1}^{(1)}[X_\nu]$ auf, $\nu = 2,\dots,n$. Seien $x_{\nu\lambda}\in k$, $x_{\nu\lambda}\neq x_{\nu\mu}$ für

$\lambda \neq \mu$, so bestimmt, daß $\omega_\nu(X_\nu, u_1) = \prod_{\lambda=1}^{l_\nu} (X_\nu - x_{\nu\lambda})^{r_{\nu\lambda}}$; dann gibt es nach dem Henselschen Lemma ([1](20.6)ɔ)) normierte Polynome $\omega_{\nu\lambda} \in \mathcal{O}_{u_1}^{(1)}[X_\nu]$, $\lambda = 1,\ldots,l_\nu$, mit $\omega_\nu = \prod_{\lambda=1}^{l_\nu} \omega_{\nu\lambda}$, $\omega_{\nu\lambda}(X_\nu, u_1) = (X_\nu - x_{\nu\lambda})^{r_{\nu\lambda}}$. Wir wählen ein $t > 0$ derart, daß alle Koeffizienten der $\omega_{\nu\lambda}$, $\lambda = 1,\ldots,l_\nu$, $\nu = 2,\ldots,n$, einen Repräsentanten in T_t besitzen. Dabei bezeichnet T_t die zu $E_t^1 := \{x_1 \in E^1,: |x_1 - u_1| \leq t\}$ gehörige k-affinoide Algebra. Fassen wir ω_ν und $\omega_{\nu\lambda}$, $\lambda = 1,\ldots,l_\nu$, jetzt als Elemente von $T_t[X_\nu]$ auf, dann gilt weiterhin $\omega_\nu = \prod_{\lambda=1}^{l_\nu} \omega_{\nu\lambda}$, $\nu = 2,\ldots,n$. Wir zeigen, daß jede irreduzible Komponente der k-affinoiden Menge $X_t := X \cap E_t^n = \pi^{-1}(E_t^1)$ genau einen Punkt aus $\pi^{-1}(u_1)$ enthält: Dafür brauchen wir nur zu zeigen, daß es zu jedem Paar $x, y \in \pi^{-1}(u_1)$, $x \neq y$, eine Funktion g über E_t^n gibt, die auf allen y enthaltenden irreduziblen Komponenten von X_t verschwindet, aber nicht im Punkte x . Wegen $x \neq y$ und $x_1 = u_1 = y_1$ können wir o.E. $x_n \neq y_n$ annehmen. x_n und y_n kommen wegen $X_t \subset N(\omega_n) \subset E_t^n$ unter den $x_{n\lambda}$ vor, sagen wir $x_n = x_{n1}$, $y_n = x_{n2}$. Für $g := \prod_{\lambda=2}^{l_n} \omega_{n\lambda}$ gilt dann $g(x) \neq 0$. Wegen $X_t \subset N(\prod_{\lambda=1}^{l_n} \omega_{n\lambda}) = N(\omega_{n1}) \cup N(g)$ liegt jede irreduzible Komponente von X_t bereits in einer der Mengen $N(\omega_{n1})$ und $N(g)$. Da $\omega_{n1}(y) \neq 0$ ist, liegt folglich jede y enthaltende irreduzible Komponente von X_t in $N(g)$, qed.

Da $\mathcal{H}_u$, $u \in \pi^{-1}(u_1)$, nach Voraussetzung nullteilerfrei ist, verläuft durch u genau eine irreduzible Komponente $X_t(u)$ von X_t mit der zugehörigen Algebra $A_t(u)$. Mit π ist auch $\pi_{t,u} := \pi | X_t(u)$ k-endlich ([4] III §4 Satz 1) und soeben wurde $\pi_{t,u}^{-1}(u_1) = u$ gezeigt. Mit Regel (1) folgt dann

$[A_t(u):T_t] = v_t(u) = v(u)$, denn in den irreduziblen Mengen $X_t(u)$ und X_t ist die Verzweigungsordnung eine lokale Eigenschaft (§2.1). Ist $\chi_t \in T_t[W]$ das Hauptpolynom von $f|X_t(u)$, dann ist nach [4] III §6 Satz 2(1) $f(u)$ die einzige Wurzel von $\chi_t(W,u_1)$, denn χ_t ist eine Potenz des Minimalpolynoms von $f|X_t(u)$. Es folgt $N_{T_t}^{A_t(u)}(f|X_t(u))(u_1) = f(u)^{[A_t(u):T_t]} = f(u)^{v(u)}$. Ist A_t die zu X_t gehörige k-affinoide Algebra, dann gilt $N_{T_t}^{A_t}(f|X_t) = \prod_{u \in \pi^{-1}(u_1)} N_{T_t}^{A_t(u)}(f|X_t(u))$. Wenn wir noch $N_T^A(f)|E_t^1 = N_{T_t}^{A_t}(f|X_t)$ gezeigt haben, folgt schließlich

$$N_T^A(f)(u_1) = \prod_{u \in \pi^{-1}(u_1)} N_{T_t}^{A_t(u)}(f|X_t(u))(u_1) = \prod_{u \in \pi^{-1}(u_1)} f(u)^{v(u)} ,$$

was wir beweisen wollen.

A und T sind aufgrund des Identitätssatzes ([4] III §4 Satz 4) Unteralgebren von A_t bzw. T_t , und wegen Regel (1) gilt $[A_t:T_t] = [A:T]$. Obige Gleichheit der Normen von f und $f|X_t$ folgt aus der Gleichheit der entsprechenden Hauptpolynome, und diese ist bewiesen (vgl. §1.2), wenn eine Basis von $Q(A)$ über $Q(T)$ auch Basis von $Q(A_t)$ über $Q(T_t)$ ist. Wegen $[A_t:T_t] = [A:T]$ reicht es dafür zu zeigen, daß $Q(T_t)\cdot Q(A) = Q(A_t)$. Da T_n dicht in der zu E_t^n gehörigen k-affinoiden Algebra liegt, liegt auch A dicht in A_t (in der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz, vgl. §1.0). Dann liegt erst recht $T_t\cdot A$ dicht in A_t , und da $T_t\cdot A$ als T_t-Unteralgebra von A_t abgeschlossen ist ([4] I §5 Satz 1),

folgt $T_t A = A_t$, so daß (vgl. §1.1) $Q(T_t)Q(A) = Q(T_t)Q(T)A = Q(T_t)A = Q(T_t)A_t = Q(A_t)$, QED.

Der folgende Satz ist im wesentlichen rein algebraischer Natur.

Satz 4.2: Zu endlich vielen regulären Punkten $P_1,\ldots,P_r \in \tilde{X}$ gibt es immer eine Überlagerung $(\pi,\tilde{\pi})$: $(X,\tilde{X}) \longrightarrow (E^1,\varkappa^1)$ mit

(1) $v(P_\varrho) = 1$, $\varrho = 1,\ldots,r$,

(2) $\tilde{\pi}(P_\varrho) \neq \tilde{\pi}(P_\sigma)$, $\varrho,\sigma = 1,\ldots,r$, $\varrho \neq \sigma$,

(3) $\tilde{\pi}^{-1}\tilde{\pi}(P_\varrho)$ besteht nur aus regulären Punkten, $\varrho = 1,..,r$.

Beweis: Wir suchen eine lineare Koordinatentransformation

(*) $\quad Y_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}X_\nu$, $\mu = 1,\ldots,n$, $a_{\mu\nu} \in E$,

von T_n , so daß die natürliche Projektion $E^n(y_1,\ldots,y_n) \longrightarrow E^1(y_1)$ die gewünschte Überlagerung $(\pi,\tilde{\pi})$ induziert. Um Satz 1.6 anwenden zu können, übersetzen wir die Bedingungen (1)-(3) in Bedingungen für die $\tilde{a}_{\mu\nu} \in \varkappa$:

Sei $\tilde{\mathfrak{m}}_\varrho$ das zu P_ϱ gehörige maximale Ideal von $\tilde{A}$ und $\mathfrak{M}_\varrho$ das maximale Ideal des regulären lokalen Ringes $\tilde{A}_{\tilde{\mathfrak{m}}_\varrho}$, dann gilt ([8] VIII §11 Th.25) $\mathfrak{M}_\varrho/\mathfrak{M}_\varrho^2 \simeq \varkappa$. Bezüglich eines solchen fest gewählten Isomorphismus setzen wir $\gamma_{\varrho\nu} := (\tilde{x}_\nu - \tilde{x}_\nu^{(\varrho)}) \bmod \mathfrak{M}_\varrho^2 \in \varkappa$, $\nu = 1,\ldots,n$. Dabei seien $\tilde{x}_1^{(\varrho)},\ldots,\tilde{x}_n^{(\varrho)}$ die Koordinaten von P_ϱ im ursprünglichen Koordinatensystem. Jede Funktion aus $\tilde{A}$ läßt sich über $\varkappa$ als Polynom in den n Funktionen $\tilde{x}_\nu - \tilde{x}_\nu^{(\varrho)} \in \tilde{A}$, $\nu = 1,\ldots,n$, schreiben. Da P_ϱ regulär ist, muß es dann aufgrund des Regularitätskriteriums (Satz 2.2) und wegen §2 Regel (4),(5) gewisse ν geben, für die $\mathrm{ord}_{P_\varrho}(\tilde{x}_\nu - \tilde{x}_\nu^{(\varrho)}) = 1$ ist. Für diese ν gilt

dann $\gamma_{\rho\nu} \neq 0$ (siehe §2.1), so daß $p_\rho \neq 0$ für das Polynom $p_\rho(A_{11},\ldots,A_{1n}) := \sum_{\nu=1}^{n} \gamma_{\rho\nu} A_{1\nu} \in \mathfrak{K}[A_{11},\ldots,A_{1n}]$. Nach Konstruktion gilt $\operatorname{ord}_{P_\rho}\left(\sum_{\nu=1}^{n} \tilde{a}_{1\nu}(\tilde{x}_\nu - \tilde{x}_\nu^{(\rho)})\right) = 1$ genau dann, wenn $p_\rho(\tilde{a}_{11},\ldots,\tilde{a}_{1n}) \neq 0$ ist. Wir bezeichnen die endlich vielen nicht regulären Punkte von $\tilde{X}$ mit $P_{r+1},\ldots,P_s$ und die Koordinaten von P_σ mit $\tilde{x}_1^{(\sigma)},\ldots,\tilde{x}_n^{(\sigma)}$; $\sigma = r+1,\ldots,s$. Zu dem nicht identisch verschwindenden Polynom

$$p := \left(\prod_{\rho=1}^{r} p_\rho\right)\left(\prod_{\substack{\rho,\sigma=1 \\ \rho\neq\sigma}}^{s}\left(\sum_{\nu=1}^{n} A_{1\nu}(\tilde{x}_\nu^{(\rho)} - \tilde{x}_\nu^{(\sigma)})\right)\right) \in \mathfrak{K}[A_{11},\ldots,A_{1n}]$$

gibt es nach Satz 1.6 eine lineare Koordinatentransformation (*) derart, daß $p(\tilde{a}_{11},\ldots,\tilde{a}_{1n}) \neq 0$ ist, und die natürlichen Abbildungen $k\langle\langle Y_1\rangle\rangle \longrightarrow A$ und $\mathfrak{K}[Y_1] \longrightarrow A$ endliche Monomorphismen sind. Diese induzieren dann eine Überlagerung $(\pi,\tilde{\pi})$: $(X,\tilde{X}) \longrightarrow (E^1,\mathfrak{K}^1)$. Die Eigenschaften (1)-(3) folgen unmittelbar aus $p(\tilde{a}_{11},\ldots,\tilde{a}_{1n}) \neq 0$, QED.

§5 Divisoren

Sei X eine rein eindimensionale k-affinoide oder $\mathfrak{X}$-affine Menge. Die zugehörige k-affinoide bzw. $\mathfrak{X}$-affine Algebra A sei reduziert.

Definition: Ein Element D der von der Menge X erzeugten freien abelschen Gruppe $F(X)$ heißt Divisor über X. Jeder Divisor D besitzt also eine eindeutige Darstellung

$$D = \sum_{x \in X} n_x x \quad , \quad n_x \in Z \ , \ n_x = 0 \text{ für fast alle } x \in X .$$

Wir sagen D sei positiv, in Zeichen $D > 0$, wenn $n_x \geq 0$ für alle $x \in X$. Wir setzen $D_1 > D_2$, falls $D_1 - D_2 > 0$ ist, und erhalten so eine Ordnungsrelation in $F(X)$. Die endliche Punktmenge

$$\operatorname{Tr} D := \{ x \in X : n_x \neq 0 \}$$

nennen wir den Träger von D.

Definition: Sei $x \in X$ und $q = \frac{f}{g} \in K = Q(A)$, $f, g \in A$, dann heißt

$$\operatorname{ord}_x q := \operatorname{ord}_x f - \operatorname{ord}_x g$$

die Ordnung von q im Punkte x.

Aufgrund von §2 Regel (3),(4) ist $\operatorname{ord}_x q$ immer erklärt und unabhängig von der Quotientendarstellung von q. Für beliebiges $q \in K$ setzen wir

$$(q) := \sum_{x \in X} (\operatorname{ord}_x q)\, x .$$

Es gilt (§2 Regel (4))

$$(q_1) + (q_2) = (q_1 q_2) .$$

(q) ist ein Divisor, d.h. $(q) \in F(X)$ genau dann, wenn q in K Nichnullteiler ist.

Beweis: Sei $q = \frac{f}{g}$, $f,g \in A$, dann ist g Nichtnullteiler, hat also, da A noethersch ist, nur endlich viele Nullstellen, die alle von endlicher Ordnung sind (§2 Regel (3)), d.h. $(g) \in F(X)$. Aus $(q) \in F(X)$ folgt jetzt $(f) = (q) + (g) \in F(X)$, d.h. f hat überall endliche Ordnung. Nach §2 Regel (3) ist dann f und damit auch q Nichtnullteiler. Ist umgekehrt q Nichtnullteiler, dann auch f . Es gilt also wie oben $(f) \in F(X)$ und damit $(q) = (f) - (g) \in F(X)$, qed.

Die Elemente der Untergruppe

$$H(X) := \{ (q) : q \text{ Nichtnullteiler in } K \}$$

von $F(X)$ nennen wir Hauptdivisoren und die der Faktorgruppe

$$C(X) := F(X)/H(X)$$

Divisorenklassen über X . Jeder Divisor $D = \sum_{x \in X} n_x x \in F(X)$ ist lokal ein Hauptdivisor, d.h. zu jedem $x \in X$ gibt es ein $q \in K$ mit $ord_x q = n_x$. Das folgt aus

Satz 5.1: Zu jedem $x \in X$ existiert ein über A ganzes Element $q \in K$ mit $ord_x q = 1$.

Beweis: a) Wir führen die Behauptung auf irreduzible X zurück: Seien $X_1, \ldots, X_r$ die irreduziblen Komponenten von X und $K_1, \ldots, K_r$ die zugehörigen Primkomponenten von K . Liegt x o.E. in X_1 , dann gibt es ein $q_1 \in K_1$ mit $ord_x q_1 = 1$. Für das Urbild q von $(q_1, 1, \ldots, 1)$ unter dem natürlichen Isomorphismus $K \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\rho=1}^{r} K_\rho$ ([2] IV §2 Prop.10) gilt dann $ord_x q = ord_x q_1 = 1$.

b) Sei jetzt X irreduzibel, d.h. A nullteilerfrei. Aufgrund der Erweiterungsendlichkeit von A ([5] §3 Satz 1 Folg.1 bzw. [6] III Prop.16) ist die Normalisierung B von A (das

ist der ganze Abschluß von A in K) ein endlicher A-Modul und damit eine k-affinoide bzw $\mathcal{K}$-affine Algebra. Da mit B auch $B_{\mathfrak{n}}$, $\mathfrak{n} \in \operatorname{Max} B$, normal und eindimensional ist, ist $B_{\mathfrak{n}}$ ein regulärer lokaler Ring ([6] III Prop.8). Sei $\mathfrak{m}$ das zu x gehörige maximale Ideal von A und seien $\mathfrak{n}_0, \mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r$ die endlich vielen ([4] III §9 Satz 2) über $\mathfrak{m}$ gelegenen (d.h. $\mathfrak{n}_\rho \cap A = \mathfrak{m}$) maximalen Ideale von B . Sei $f \in B$ mit $\operatorname{ord}_{\mathfrak{n}_0} f = 1$ (Satz 2.2), dann gilt für ein $g \in (\mathfrak{n}_0 \cap \bigcap_{\substack{\rho=1 \\ f \notin \mathfrak{n}_\rho}}^{r} \mathfrak{n}_\rho) - \bigcup_{\substack{\rho=1 \\ f \in \mathfrak{n}_\rho}}^{r} \mathfrak{n}_\rho$ ($\neq \emptyset$ nach [6] I Prop.2) $q := f + g^2 \notin \mathfrak{n}_\rho$, d.h. $\operatorname{ord}_{\mathfrak{n}_\rho} q = 0$, $\rho = 1, \ldots, r$, und wegen $\operatorname{ord}_{\mathfrak{n}_0} g^2 = 2 \operatorname{ord}_{\mathfrak{n}_0} g \geq 2$ $\operatorname{ord}_{\mathfrak{n}_0} q = \min(\operatorname{ord}_{\mathfrak{n}_0} f, \operatorname{ord}_{\mathfrak{n}_0} g^2) = 1$ (§2 Regel (5)). Aus Satz 2.3 (der sich unmittelbar auf Quotienten von Funktionen überträgt) folgt dann $\operatorname{ord}_{\mathfrak{m}} q = \sum_{\rho=0}^{r} \operatorname{ord}_{\mathfrak{n}_\rho} q = \operatorname{ord}_{\mathfrak{n}_0} q = 1$, QED.

Für $X = E^1$ oder $\mathcal{K}^1$ gilt $C(X) = (0)$. Ist nämlich $D = \sum_{x \in X} n_x x \in F(X)$, dann gilt $D = (q) \in H(X)$ für $q := \prod_{x \in X} (X_1 - x)^{n_x} \in Q(A)$, $A = k\langle\langle X_1 \rangle\rangle$ bzw. $\mathcal{K}[X_1]$. Außerdem ist q durch D bis auf Multiplikation mit einer Einheit aus A eindeutig bestimmt. Letzteres gilt allgemein für singularitätenfreie X :

<u>Satz 5.2</u>: Sei X singularitätenfrei und irreduzibel und $q \in K$. Es gilt

(1) $(q) > 0$ genau dann, wenn $q \in A$,

(2) $(q) = 0$ genau dann, wenn q in A Einheit ist.

<u>Beweis</u>: (1) Aus $(q) > 0$, d.h. $\operatorname{ord}_{\mathfrak{m}} q \geq 0$, $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$, folgt $q \in A_{\mathfrak{m}}$, denn $A_{\mathfrak{m}}$ ist regulär (vgl. Beweis von Satz 2.1). Es gilt also $q \in \bigcap_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A} A_{\mathfrak{m}} = A$ ([8]VI §14 Th.34). Die Umkehrung ist trivial.

(2) ist $(q) = 0$, so folgt aus (1) $q \in A$ und wegen $l(A_{\mathfrak{m}}/A_{\mathfrak{m}}q_{\mathfrak{m}}) = \mathrm{ord}_{\mathfrak{m}}q = 0$ liegt q in keinem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ von A , d.h. q ist Einheit, und umgekehrt, QED.

§6 Bilder und Urbilder von Hauptdivisoren beim Übergang vom k-Affinoiden zum $\mathfrak{X}$-Affinen

Im folgenden sei $(X,\mathcal{K},A)$ wieder ein k-reduzierter, rein eindimensionaler k-affinoider Raum und $(\tilde{X},\tilde{A})$ der zugehörige $\mathfrak{X}$-affine Raum. Sei $K = Q(A)$, dann ist $\tilde{K} = Q(\tilde{A})$ (Satz 1.3).

Die natürliche Abbildung $X \longrightarrow \tilde{X}$ wird durch

$$D = \sum_{x\in X} n_x x \quad \rightsquigarrow \quad \tilde{D} := \sum_{x\in X} n_x \tilde{x} = \sum_{\tilde{x}\in\tilde{X}} \Big(\sum_{\substack{y\in X \\ \tilde{y}=\tilde{x}}} n_y \Big)\, \tilde{x}$$

zu einem Gruppenepimorphismus $F(X) \longrightarrow F(\tilde{X})$ fortgesetzt. Satz 3.1 lautet dann in der Sprache der Divisoren:

Satz 6.1: Sei $q \in \mathring{K}$ derart, daß $\tilde{q}$ Nichtnullteiler in $\tilde{K}$ ist, dann gilt $(\tilde{q}) = \widetilde{(q)}$.

Beweis: Es ist zu zeigen, daß $\operatorname{ord}_{\tilde{x}}\tilde{q} = \sum_{\substack{y\in X \\ \tilde{y}=\tilde{x}}} \operatorname{ord}_y q$ für $\tilde{x}\in\tilde{X}$. Seien $f,g \in \mathring{A}$ derart, daß $q = \frac{f}{g}$, $\tilde{q} = \frac{\tilde{f}}{\tilde{g}}$. $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ sind dann Nichtnullteiler in $\tilde{A}$ und mit Satz 3.1 gilt $\operatorname{ord}_{\tilde{x}}\tilde{q} = \operatorname{ord}_{\tilde{x}}\tilde{f} - \operatorname{ord}_{\tilde{x}}\tilde{g} = \sum_{\substack{y\in X \\ \tilde{y}=\tilde{x}}} \operatorname{ord}_y f - \sum_{\substack{y\in X \\ \tilde{y}=\tilde{x}}} \operatorname{ord}_y g =$

$\sum_{\tilde{y}=\tilde{x}} (\operatorname{ord}_y f - \operatorname{ord}_y g) = \sum_{\tilde{y}=\tilde{x}} \operatorname{ord}_y q$, QED.

Das Bild eines Hauptdivisors über X in $F(\tilde{X})$ ist also wieder ein Hauptdivisor, zumindest wenn $\tilde{X}$ irreduzibel ist. Interessanter ist die umgekehrte Frage: Ist $D \in F(X)$ Hauptdivisor, falls $\tilde{D}$ Hauptdivisor ist ? Daß dies nicht immer gilt, zeigt das folgende Beispiel.

Beispiel 1: Unser Beispiel ist auf jeder singularitätenfreien k-affinoiden Menge X möglich, für die $\tilde{X}$ irreduzibel aber nicht singularitätenfrei ist. Zunächst geben wir eine

solche Menge an.

Seien $a_i \in k$, $|a_i| < 1$, $i = 1,2,3$, so gewählt, daß das Polynom $X_1^3 + a_1X_1^2 + a_2X_1 + a_3$ nur einfache Wurzeln besitzt. Die zu der k-affinoiden Algebra $A := T_2/T_2(X_2^2-X_1^3-a_1X_1^2-a_2X_1-a_3)$ gehörige k-affinoide Menge $X \subset E^2$ ist dann singularitätenfrei(denn in den drei Verzweigungspunkten bezüglich der Projektion auf die X_1-Achse verhält sie sich wie das singularitätenfreie Nullstellengebilde von $X_1^2 - X_1$ im Nullpunkt). Da nach Satz 1.1 $\tilde{A} = \tilde{T}_2/\tilde{T}_2(X_2^2-X_1^3)$ ist, ist $\tilde{X} \subset \mathfrak{K}^2$ zwar irreduzibel, im Nullpunkt jedoch singulär.

Nun zur Konstruktion von D: Sei $\tilde{x} \in \tilde{X}$ singulär und $\tilde{q} \in \tilde{K}$ ganz über $\tilde{A}$ mit $\mathrm{ord}_{\tilde{x}}\tilde{q} = 1$ (Satz 5.1). Da $\tilde{q}$ in der Normalisierung $\tilde{B}$ von $\tilde{A}$ liegt, definiert es über dem zu $\tilde{B}$ gehörigen $\mathfrak{K}$-affinen Raum einen positiven Divisor (Satz 5.2). Nach dem $\mathfrak{K}$-affinen Analogon zu Satz 2.3 ist dann auch $(\tilde{q})$ ein positiver Divisor über $\tilde{X}$. Sei jetzt D ein positiver Divisor über X mit $\tilde{D} = (\tilde{q})$. Wäre D Hauptdivisor, dann gäbe es nach Satz 5.2 ein $f \in A, \overset{o.E.\ |f|=1,}{\vee}$ mit $D = (f)$, so daß mit Satz 6.1 $(\tilde{f}) = \tilde{D} = (\tilde{q})$ und damit $\mathrm{ord}_{\tilde{x}}\tilde{f} = 1$ ist, im Widerspruch zum Regularitätskriterium (Satz2.2).

Da die Schwierigkeiten von den singulären Punkten von $\tilde{X}$ und den positiven Hauptdivisoren von Funktionen aus $\tilde{K} - \tilde{A}$ herrühren, betrachten wir im folgenden wichtigen Satz über X nur positive Divisoren, deren Träger im vollen Urbild $R := \{x \in X : \tilde{x} \text{ regulär in } \tilde{X}\}$ der regulären Punkte von $\tilde{X}$ liegt, und über $\tilde{X}$ nur Hauptdivisoren von Funktionen aus $\tilde{A}$.

Satz 6.2: Sei D ein positiver Divisor über X mit $\mathrm{Tr}\, D \subset R$, und es gebe ein $f \in \mathring{A}$ mit $\tilde{D} = (\tilde{f})$, dann gibt es

ein $g \in \mathcal{A}(A)$ derart, daß $D = (f + g)$.

Beweis: Sei $\mathrm{Tr}\, D = \{y_1, \ldots, y_r\}$, $D = \sum_{\rho=1}^{r} n_\rho y_\rho$ und $m_\rho := \min(n_\rho, \mathrm{ord}_{y_\rho} f)$, und seien (nicht notwendig paarweise und von den y_ρ verschiedene) Punkte $z_\alpha \in X$ so bestimmt, daß

$$(f) = \sum_{\rho=1}^{r} m_\rho y_\rho + \sum_{\alpha} z_\alpha \ .$$

Gilt noch nicht $D = (f)$, dann gilt wegen $\tilde{D} = (\tilde{f})$ auch nicht $m_\rho = n_\rho$ für alle ρ (Satz 6.1). Es gibt also ein ρ , o.E. sei dies $\rho = 1$, mit $m_1 < n_1$. Wir werden dazu eine Funktion $h \in \mathcal{A}(A)$ mit

$$\mathrm{ord}_{y_1}(f-h) > m_1 \ , \quad \mathrm{ord}_{y_\rho}(f-h) \geq m_\rho \ , \ \rho = 2, \ldots, r \ ,$$

konstruieren. Durch vollständige Induktion folgt dann, daß es ein $g \in \mathcal{A}(A)$ gibt mit $\mathrm{ord}_{y_\rho}(f+g) \geq n_\rho$, $\rho = 1, \ldots, r$. Nach Satz 6.1 gilt dann wegen $\tilde{D} = (\tilde{f}) = \widetilde{(f+g)}$ bereits $D = (f+g)$. Es bleibt also nur noch h zu konstruieren.

Aufgrund von Satz 4.2 können wir zu $\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_r \in \tilde{R}$ eine Überlagerung $(\pi, \tilde{\pi}): (X, \tilde{X}) \longrightarrow (E^1, \mathcal{R}^1)$ so wählen, daß $\tilde{\pi}^{-1}\tilde{\pi}(\mathrm{Tr}\, \tilde{D})$ nur aus regulären Punkten besteht, $\tilde{\pi}|\mathrm{Tr}\, \tilde{D}$ injektiv ist und $v(\tilde{y}_\rho) = 1$, $\rho = 1, \ldots, r$. Aus $v(\tilde{y}_1) = 1$ folgt $v(y_1) = 1$ (§4 Regel (2)), d.h. $\mathrm{ord}_{y_1}(x_1 - \pi(y_1)) = 1$. Es gilt dann $\mathrm{ord}_{y_1}(x_1 - \pi(y_1))^{m_1} = m_1 = \mathrm{ord}_{y_1} f$, so daß sich die für alle Punkte $x \in X$ mit $\pi(x) \neq \pi(y_1)$ erklärte Funktion

$$q(x) := \frac{f(x)}{(x_1 - \pi(y_1))^{m_1}}$$

analytisch in den nach Satz 2.2 regulären Punkt $y_1 \in X$ fortsetzen läßt. Wir schätzen $|q(y_1)|$ ab:

Für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$, $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathrm{Tr}\, \tilde{D}$ folgt aus §4 Regel (2) $\pi(x) \neq \pi(y)$ und $v(x) = 1$. Wegen $\tilde{D} = (\tilde{f})$ gilt $|f(y)| = 1$, falls $\tilde{y} \notin \mathrm{Tr}\, \tilde{D}$. Hieraus folgt dann mit Satz 4.1,

daß für alle $x \in X$ mit $\tilde{x} \in \mathrm{Tr}\,\tilde{D}$ $|N_T^A(f)(x_1)| = |\prod_{y \in \pi^{-1}(x_1)} f(y)^{v(y)}| = |f(x)|$, $x_1 = \pi(x)$. Satz 2.4 besagt $(N_T^A(f)) = \sum_{\rho=1}^{r} m_\rho \pi(y_\rho) + \sum_\alpha \pi(z_\alpha)$, so daß (Satz 5.2(2)) $N_T^A(f) = e \prod_{\rho=1}^{r} (x_1 - \pi(y_\rho))^{m_\rho} \prod_\alpha (x_1 - \pi(z_\alpha))$, wobei e eine Einheit aus T mit $|e| = 1$ ist. Wegen $|e(x_1)| = 1$, $x_1 \in E^1$, ([4] §1 Satz 2) folgt $|N_T^A(f)(x_1)| = |\prod_{\rho=1}^{r} (x_1 - \pi(y_\rho))^{m_\rho} \prod_\alpha (x_1 - \pi(z_\alpha))|$. Wegen $m_1 < n_1$ gibt es (Satz 6.1) ein α mit $\tilde{z}_\alpha = \tilde{y}_1$, so daß wegen $z_\alpha \neq y_1$ $0 < d := |\pi(y_1) - \pi(z_\alpha)| < 1$. Für alle $x \in X$ mit $\tilde{x} = \tilde{y}_1$ und $|x_1 - \pi(y_1)| \leq d$, $x_1 = \pi(x)$, gilt dann $|x_1 - \pi(z_\alpha)| \leq \max(|x_1 - \pi(y_1)|, |\pi(y_1) - \pi(z_\alpha)|) = d$ und damit $|f(x)| = |N_T^A(f)(x_1)| \leq |(x_1 - \pi(y_1))^{m_1} \prod_{\rho=2}^{r} (x_1 - \pi(y_\rho))^{m_\rho}| d$. Wegen der Stetigkeit von q im Punkte y_1 ergibt sich hieraus $|q(y_1)| \leq |\prod_{\rho=2}^{r} (\pi(y_1) - \pi(y_\rho))^{m_\rho}| d < |\prod_{\rho=2}^{r} (\pi(y_1) - \pi(y_\rho))^{m_\rho}|$.

Wir setzen jetzt

$$h(x) := \frac{q(y_1)}{\prod_{\rho=2}^{r} (\pi(y_1) - \pi(y_\rho))^{m_\rho}} \prod_{\rho=1}^{r} (x_1 - \pi(y_\rho))^{m_\rho} \in T \subset A .$$

Aus obiger Abschätzung folgt $|h| < 1$, d.h. $h \in \mathfrak{A}(A)$. Wegen $v(y_\rho) = 1$ ist $\mathrm{ord}_{y_\rho} h = m_\rho$, so daß nach §2 Regel (5) $\mathrm{ord}_{y_\rho} (f-h) \geq \min(\mathrm{ord}_{y_\rho} f, \mathrm{ord}_{y_\rho} h) = m_\rho$, $\rho = 1, \ldots, r$. Nach Konstruktion gilt für die in dem regulären Punkt y_1 analytische Funktion $q' := q - \frac{h}{(x_1 - \pi(y_1))^{m_1}}$ $q'(y_1) = 0$, d.h. $\mathrm{ord}_{y_1} q' \geq 1$. Wegen $f - h = (x_1 - \pi(y_1))^{m_1} q'$ ist dann schließlich $\mathrm{ord}_{y_1} (f-h) = \mathrm{ord}_{y_1} (x_1 - \pi(y_1))^{m_1} + \mathrm{ord}_{y_1} q' \geq m_1 + 1$, QED.

Wenn man beweisen will, daß $D > 0$ Hauptdivisor ist, falls $\tilde{D} = (\tilde{f})$, $\tilde{f} \in \tilde{A}$ gilt, kann man die Voraussetzung $\mathrm{Tr}\, D \subset R$ von Satz 6.2 kaum abschwächen:

Beispiel 2: Sei X eine k-affinoide Menge wie in Beispiel 1. Wir geben einen positiven Divisor $D = \sum_{x \in X} n_x x$ über X an, zu dem ein $\tilde{f} \in \tilde{A}$ mit $\tilde{D} = (\tilde{f})$ und ein $g \in A$ mit $\mathrm{ord}_x g = n_x$ für $x \in X - R$ existiert, und der trotzdem kein Hauptdivisor ist. Die ziemlich starke Bedingung, daß D eingeschränkt auf die Menge $X - R$ Hauptdivisor einer sogar auf ganz X fortsetzbaren Funktion g ist, ist also noch nicht hinreichend dafür, daß D Hauptdivisor ist.

Zunächst benötigen wir noch einige Eigenschaften von $\tilde{A}$: x_1 und x_2 bezeichnen hier die Bilder von $X_1, X_2 \in T_2$ in A. Das Element $t := \frac{\tilde{x}_2}{\tilde{x}_1} \in \tilde{K} = Q(\tilde{A})$ ist transzendent über $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k}[t]$ also eine Polynomalgebra. Wegen $\tilde{x}_2^2 = \tilde{x}_1^3$ ist $t^2 = \tilde{x}_1$ und $t^3 = \tilde{x}_2$, so daß $\tilde{A} = \{\sum \alpha_\nu t^\nu \in \mathfrak{k}[t] : \alpha_1 = 0\}$ ist. Die natürliche Abbildung $t \rightsquigarrow (t^2, t^3)$ der t-Ebene auf $\tilde{X}$ ist bijektiv. Da t ganz über $\tilde{A}$ ist, ist $\mathfrak{k}[t]$ endlicher $\tilde{A}$-Modul, so daß aufgrund von Satz 2.3 $\mathrm{ord}_{\tilde{x}} \tilde{f} = \mathrm{ord}_t \tilde{f}$ für alle $\tilde{f} \in \tilde{A}$ und $\tilde{x} = (t^2, t^3) \in \tilde{X}$.

Der Divisor der Funktion $t^2(1-t) = \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 \in \tilde{A}$ berechnet sich hiernach zu $(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2) = 2\,(0,0) + (1,1)$, $(0,0), (1,1) \in \tilde{X} \subset \mathfrak{k}^2$. Nach Satz 6.1 ist dann $(x_1 - x_2) = u + v + w$ mit $u, v, w \in X$, $\tilde{u} = \tilde{v} = (0,0)$, $\tilde{w} = (1,1)$. Sei jetzt $D := u + v$. Dieser positive Divisor erfüllt die oben angegebenen Bedingungen mit $\tilde{f} = \tilde{x}_1$ und $g = x_1 - x_2$. Wäre nun D Hauptdivisor, dann gäbe es nach Satz 5.2 ein $f' \in A$, o.E. $|f'| = 1$, mit $D = (f')$. Da dann der Hauptdivisor $(\frac{g}{f'}) = (g) - D = w$

positiv ist, wäre nach Satz 5.2 $h := \frac{g}{f} \in A$. Da $\tilde{A}$ nullteilerfrei ist, wäre mit Satz 6.1 $(\tilde{h}) = \widetilde{(h)} = \tilde{w}$. Das ist aber nicht möglich, da über $\tilde{X}$ ein einpunktiger Divisor nicht Hauptdivisor sein kann: Für jedes $\tilde{f} \in \tilde{A}$ ist $\sum_{\tilde{x} \in \tilde{X}} \operatorname{ord}_{\tilde{x}} \tilde{f}$ gleich dem Grad von $\tilde{f}$ als Polynom in t, und der ist stets ungleich eins.

Zum Abschluß ziehen wir noch einige Folgerungen aus Satz 6.2.

Satz 6.3: Sei D ein Divisor über X mit $\operatorname{Tr} D \subset R$. Es gebe Funktionen $\tilde{f}, \tilde{g} \in \tilde{A}$ mit $\operatorname{Tr}(\tilde{g}) \subset \tilde{R}$ und $\tilde{D} = \left(\frac{\tilde{f}}{\tilde{g}}\right)$, dann ist auch D ein Hauptdivisor.

Beweis: Aufgrund von Satz 4.2 gibt es zu $\widetilde{\operatorname{Tr} D} \subset \tilde{R}$ eine Überlagerung $(\pi, \tilde{\pi}): (X, \tilde{X}) \longrightarrow (E^1, \mathfrak{X}^1)$ mit $\tilde{\pi}^{-1}\tilde{\pi}(\widetilde{\operatorname{Tr} D}) \subset \tilde{R}$. Um die Behauptung auf den vorigen Satz zurückzuführen, schreiben wir $D = \sum_{x \in X} n_x x$ als Differenz der positiven Divisoren $D_+ := \sum_{x \in X} \max(0, n_x)\, x$ und $D_- := \sum_{x \in X} \max(0, -n_x)\, x$: $D = D_+ - D_-$. Man wähle eine Funktion $\tilde{h} \in \tilde{T} \subset \tilde{A}$ mit $\tilde{\pi}(\operatorname{Tr}(\tilde{h})) \subset \tilde{\pi}(\widetilde{\operatorname{Tr} D})$ und $(\tilde{g}\tilde{h}) > \tilde{D}_-$. Dann gilt wegen $(\tilde{f}\tilde{h}) - (\tilde{g}\tilde{h}) = \left(\frac{\tilde{f}\tilde{h}}{\tilde{g}\tilde{h}}\right) = \tilde{D} = \tilde{D}_+ - \tilde{D}_-$ $\quad (\tilde{f}\tilde{h}) - \tilde{D}_+ = (\tilde{g}\tilde{h}) - \tilde{D}_- > 0$. Sei $(\tilde{g}\tilde{h}) - \tilde{D}_- = \sum_{\rho=1}^{r} m_\rho \tilde{x}_\rho$, dann ist $m_\rho \geq 0$ und $\tilde{x}_\rho \in \tilde{R}$, $\rho = 1, \ldots, r$, denn $\operatorname{Tr}(\tilde{g}) \subset \tilde{R}$, $\operatorname{Tr} \tilde{D}_- \subset \widetilde{\operatorname{Tr} D} \subset \tilde{R}$ und $\operatorname{Tr}(\tilde{h}) \subset \tilde{\pi}^{-1}\tilde{\pi}(\operatorname{Tr} D) \subset \tilde{R}$. Sei $x_1, \ldots, x_r \in X$ ein System von Urbildern der $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_r$. Für die positiven Divisoren $D_1 := D_+ + \sum_{\rho=1}^{r} m_\rho x_\rho$ und $D_2 := D_- + \sum_{\rho=1}^{r} m_\rho x_\rho$ gilt dann $\operatorname{Tr} D_i \subset R$, $i = 1,2$, und $\tilde{D}_1 = (\tilde{f}\tilde{h})$, $\tilde{D}_2 = (\tilde{g}\tilde{h})$. Auf D_1 und D_2 können wir also Satz 6.2 anwenden und erhalten, daß D_1, D_2 und damit auch $D = D_+ - D_- = D_1 - D_2$ Hauptdivisoren sind, QED.

Korollar 1: $\tilde{X}$ sei singularitätenfrei. Ist D ein Divisor über X derart, daß $\tilde{D}$ Hauptdivisor ist, dann ist auch D Hauptdivisor.

Korollar 2: Ist $\tilde{X}$ irreduzibel, dann induziert der natürliche Epimorphismus $F(X) \longrightarrow F(\tilde{X})$ einen Epimorphismus $C(X) \longrightarrow C(\tilde{X})$ der Gruppen der Divisorenklassen. Ist $\tilde{X}$ zusätzlich singularitätenfrei, dann ist dies ein Isomorphismus.

Beweis: Aus Satz 6.1 folgt $\widetilde{H(X)} = H(\tilde{X})$, woraus sich die erste Behauptung ergibt. Nach Korollar 1 liegt das volle Urbild von $H(\tilde{X})$ in $F(X)$ bereits in $H(X)$, was die zweite Behauptung liefert, QED.

Literaturverzeichnis

[1] ABHYANKAR, S.S.: Local Analytic Geometry, New York 1964.

[2] BOURBAKI, N.: Algèbre Commutative, Paris 1961.

[3] GERRITZEN, L.: Zur nichtarchimedischen Funktionentheorie über nicht vollkommenen Grundkörpern, Dissertation, Göttingen 1966.

[4] GRAUERT, H. und R. REMMERT: Nichtarchimedische Funktionentheorie, Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen, Bd. 33 (Weierstraß-Festband), 393-418, Opladen 1966.

[5] GRAUERT, H. und R. REMMERT: Über die Methode der diskret bewerteten Ringe in der nichtarchimedischen Analysis, Inventiones math. 2 (1966), 87-133.

[6] SERRE, J.-P.: Algèbre Locale - Multiplicités, Lecture notes in math. 11 (1965).

[7] TATE, J.: Rigid Analytic Spaces, IHES, Paris 1962.

[8] ZARISKI, O. und P. SAMUEL: Commutative Algebra, Vols. 1,2, Princeton 1958, 1960.

Lebenslauf

Am 13. April 1942 wurde ich als erstes Kind des Mathematikers Dr. Horst Denneberg und seiner Ehefrau Annemarie, geb. Rehm, in Berlin geboren. Ostern 1948 kam ich in Göttingen zur Schule und besuchte dort auch - mit einer Unterbrechnung von 1953 bis 1955 in Wiesbaden - das Gymnasium, und zwar bis zur mittleren Reife das humanistische Max-Planck-Gymnasium und dann den naturwissenschaftlichen Zweig des Felix-Klein-Gymnasiums. Dort legte ich Ostern 1961 die Reifeprüfung ab und begann im Sommersemester desselben Jahres an der Universität Göttingen Mathematik zu studieren. Nach dem Vordiplom im Sommersemester 1963 ging ich für zwei Semester an die Eidgenössische Technische Hochschule in Zürich und kam dann wieder zu Professor Grauert nach Göttingen zurück. Hier legte ich am 30.6.1966 die Diplomprüfung in Mathematik ab.

Bönecke-Druck 3392 Clausthal-Z. 29